《实变函数论》思考题及习题解答

Compiled by Harvey Peng

2023.6

Contents

注：(i) 对应教材是周民强《实变函数论》(第三版).

(ii) 本文档只收录了部分题目及解答 (大约 84%).

(iii) 如果发现任何 typo 或是证明的错误, 欢迎联系我指出. QQ: 3275779330.

(iv) 本文档仅供个人使用, 请勿用作其他用途.

1 集合与点集

1.1 集合与子集合

本节没有习题.

1.2 集合的运算

(二) 差与补

-思考题 2-. 设 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots, B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n \subset \cdots$, 则

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n).$$

证明. 显然 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \implies \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) \subset \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right)$. 另一方面, $x \in \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right) \implies x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 且 $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \implies \exists n_0$, s.t. $x \in A_{n_0}$ 且 $\exists n_1$, s.t. $x \in B_{n_1} \overset{A_n\nearrow}{\underset{B_n\nearrow}{\Longrightarrow}} \exists n = \max\{n_0, n_1\}$, s.t. $x \in A_n \cap B_n \implies x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n)$. 由此可得 $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n)$. □

思考题 3. 设 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots, B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$, 则

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n).$$

证明. 直接利用上一题的结论. 因 $A_i^c \nearrow, B_i^c \nearrow$, 于是由 De Morgan 法则, $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \cap \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n^c\right) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n^c \cap B_n^c) \implies \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \cap \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n^c\right)^c = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n)^c \implies \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n)$. □

-思考题 4-. 设有集合 A, B, E 和 F.

(i) 若 $A \cup B = E \cup F, A \cap F = \varnothing, B \cap E = \varnothing$, 则

$$A = E \text{ 且} B = F;$$

(ii) 若 $A \cup B = E \cup F$, 令 $A_1 = A \cap E, A_2 = A \cap F$, 则

$$A_1 \cup A_2 = A.$$

证明. (i) $A = A\cap(A\cup B) = A\cap(E\cup F) = (A\cap E)\cup(A\cup F) = A\cap E\subset E$. 同理 $E=(E\cap A)\cup(E\cap B)\subset A$. 所以 $A=E$. 同理 $B=F$.
(ii) $A_1\cup A_2=(A\cap E)\cup(A\cap F)=A\cap(E\cup F)=A\cap(A\cup B)=A$. □

(三) 集合列的极限 (集)

思考题 1. 设 $\{f_n(x)\}$ 以及 $f(x)$ 都是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值函数, 且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x), x\in\mathbb{R},$$

则对 $t\in\mathbb{R}$, 有

$$\{x\in\mathbb{R}: f(x)\leqslant t\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x\in\mathbb{R}: f_n(x)<t+\frac{1}{k}\right\}.$$

证明. 设 $A=\{x\in\mathbb{R}: f(x)\leqslant t\}, E_{n,k}=\{x\in\mathbb{R}: f(x)\leqslant t+\frac{1}{k}\}$, 则 $x\in A \iff f(x)\leqslant t \iff \forall k, f(x)<t+\frac{1}{k}$. 由极限的保序性, $\forall k\in\mathbb{N}_+,\exists m\in\mathbb{N}_+,\forall n\geqslant m, f_n(x)<t+\frac{1}{k}$, 此即 $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}E_{n,k}$. 另一方面, $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}E_{n,k} \iff \forall k,\exists m,\forall n\geqslant m, f_n(x)<t+\frac{1}{k}$. 先后命 n 和 k 趋于无穷可得 $f(x)\leqslant t$, 此即 $x\in A$. 所以命题得证. □

思考题 2. 设 $a_n\to a(n\to\infty)$, 则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left(a_n-\frac{1}{k},a_n+\frac{1}{k}\right)=\{a\}.$$

证明. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a \iff \forall\varepsilon>0,\exists m\in\mathbb{N}_+,\forall n\geqslant m,|a_n-a|<\varepsilon \iff \forall k\in\mathbb{N}_+,\exists m,\forall n\geqslant m, a\in\left(a_n-\frac{1}{k},a_n+\frac{1}{k}\right) \iff a\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left(a_n-\frac{1}{k},a_n+\frac{1}{k}\right)$. 同前面论述可知 $b\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left(a_n-\frac{1}{k},a_n+\frac{1}{k}\right) \iff \lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$. 由极限的唯一性知 $b=a$. 所以我们得到 $\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left(a_n-\frac{1}{k},a_n+\frac{1}{k}\right)=\{a\}$. □

1.3 映射与基数

(一) 映射

-思考题 1-. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 记 $f_1(x)=f(x), f_n(x)=f(f_{n-1}(x))(n=2,3,\cdots)$. 若存在 n_0, 使得 $f_{n_0}(x)=x$, 则 f 是 $\mathbb{R}$ 到 $f(\mathbb{R})$ 上的一一映射.

证明. 只需证明 f 是单射. 事实上, 由

$$f(x)=f(y) \implies f_2(x)=f_2(y) \implies \cdots \implies x=f_{n_0}(x)=f_{n_0}(y)=y$$

立知结论成立. $\square$

-思考题 2-. 不存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 f, 它在无理数集 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 上是一一映射, 而在 $\mathbb{Q}$ 上则不是一一映射.

证明. 反证. 若存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 使得 $f|_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}:\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\to\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 是一一映射, 而 $f|_{\mathbb{Q}}:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ 不是一一映射.
(i) 若 $f|_{\mathbb{Q}}$ 不是单射, 则

$$\exists r,s\in\mathbb{Q},r<s,\ \text{s.t. } f(r)=f(s)\equiv A\in\mathbb{Q}.$$

取 $x\in(r,s)\backslash\mathbb{Q}$, 则 $f(x)\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\implies f(x)\neq A$. 不妨设 $f(x)<A$, 则对 $\forall y\in(f(x),A)\backslash\mathbb{Q}$, 由连续函数介值定理,

$$\exists x_1\in(r,x)\backslash\mathbb{Q},x_2\in(x,s)\backslash\mathbb{Q},\ \text{s.t. } f(x_1)=y=f(x_2),$$

这与 $f|_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}$ 是一一映射矛盾.
(ii) 若 $f|_{\mathbb{Q}}$ 不是满射, 则

$$\exists r\in\mathbb{Q},\ \text{s.t. } \forall s\in\mathbb{Q},f(s)\neq r. \tag{$*$}$$

取 $y_1,y_2\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, s.t. $y_1<r<y_2$, 由 $f|_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}$ 是一一映射知

$$\exists x_1,x_2\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},x_1\neq x_2,\ \text{s.t. } f(x_1)=y_1<y_2=f(x_2).$$

不妨设 $x_1<x_2$, 则由连续函数介值定理, $\exists t\in(x_1,x_2)$, s.t. $f(t)=r$. 由 $(*)$ 式知 $t\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\implies r=f(t)\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. 这与 $r\in\mathbb{Q}$ 矛盾. $\square$

-思考题 3-. $f:X\to Y$ 是满射当且仅当对任意的真子集 $B\subset Y$, 有

$$f(f^{-1}(B))=B.$$

证明. $\implies$. 设 $y\in f(f^{-1}(B))$, 则存在 $x\in f^{-1}(B),f(x)=y\in B$, 所以 $f(f^{-1}(B))\subset B$. 另一方面, 由 f 是满射知若 $y\in B$, 则 $\exists x\in X,y=f(x)$, 进而 $x\in f^{-1}B$, 故 $y=f(x)\in f(f^{-1}B)$, 此即 $B\subset f(f^{-1}(B))$.
$\impliedby$. 若 Y 是单点集, 则 $f:X\to Y$ 是满射. 若 Y 不是单点集, 则

$$\begin{aligned} y\in Y &\implies \{y\}\subsetneqq Y\implies\{y\}=f(f^{-1}(\{y\}))\\ &\implies f^{-1}(\{y\})\neq\varnothing\implies\exists x\in f^{-1}(\{y\})\implies y=f(x). \end{aligned}$$

故 f 是满射. $\square$

思考题 5. 试证明下列命题: 设 $f:X\to Y,g:Y\to X$. 若对任意的 $x\in X$, 必有 $g(f(x))=x$, 则 f 是单射, g 是满射.

证明. 证法 1. 反证, 设 f 不单, g 不满. 对 $f, \exists x_1, x_2, x_1 \neq x_2, Y \ni y_0 := f(x_1) = f(x_2)$. 这样 $g[f(x_1)] = g[f(x_2)] = g(y_0) = x_1 = x_2$, 这与映射的定义矛盾, 故 f 是单射. 对 $g, \exists x_0 \in X$, s.t. x_0 在映射 g 下没有原像, 即 $\nexists y \in Y, g(y) = x_0 = g[f(x_0)]$, 即 $\nexists y$,s.t. $f(x_0) = y$, 这又与映射的定义矛盾, 故 g 是满射.

证法 2. $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) = x_2 \implies f$ 是单射. 又由 $\forall x \in X, \exists y = f(x) \in Y$, s.t. $x = g \circ f(x) = g(y) \implies g$ 是满射. □

(二) 基数

-思考题 1-. 设 $A_1 \subset A_2, B_1 \subset B_2$. 若 $A_1 \sim B_1, A_2 \sim B_2$, 试问: 是否有 $(A_2 \backslash A_1) \sim (B_2 \backslash B_1)$?

解. 不一定, 比如 $A_1 = \{2, 3, 4, \cdots\} \subset A_2 = \{1, 2, 3, \cdots\}; B_1 = \{3, 4, 5, \cdots\} \subset B_2 = \{1, 2, 3, \cdots\}$. 显然 $A_1 \sim B_1, A_2 \sim B_2$, 但 $A_2 \backslash A_1 = \{2\} \nsim \{1, 2\} = B_2 \backslash B_1$. □

思考题 3. 若 $A \subset B$ 且 $A \sim (A \cup C)$, 试证明 $B \sim (B \cup C)$.

证明. 由 $A \subset A \cup (C \backslash B) \subset A \cup C, A \sim A \cup C$ 及 Cantor-Bernstein 定理知 $A \sim A \cup (C \backslash B)$. 设 $\phi : A \to A \cup (C \backslash B)$ 是一一映射, 则

$$\psi(x) := \begin{cases} \phi(x), & x \in A \\ x, & x \in B \backslash A \end{cases}$$

是 B 到 $B \cup C$ 的一一映射, 所以 $B \sim B \cup C$. □

思考题 5. 试问: 由自然数组成且公差亦为自然数的等差数列之全体形成的集合的基数是什么?

解. 设题中集合为 A, 则 $A = \{a_n = a_1 + (n-1)d\}_{n=1}^{\infty} \sim \{(a_1, d) : a_1, d \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$. 于是 A 的基数为 $\aleph_0$. □

思考题 7. 试问: 是否存在满足

$$f(x) = \begin{cases} \text{无理数}, & x \text{ 是有理数}, \\ \text{有理数}, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

的函数 $f \in C(\mathbb{R})$?

解. 不存在. 反证, 设这样的 f 存在, 显然 f 不是常函数. 一方面, 由连续函数介值定理知 $f(\mathbb{R})$ 是一个区间, 其基数为 $\aleph_1$. 另一方面, $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{Q}) \cup f(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \subset f(\mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$, 这是可数集的像和可数集的并, 它仍然可数, 基数为 $\aleph_0$. 于是我们得到了矛盾, 故有结论. □

-思考题 8-. 设 $E \subset (0, 1)$ 是无限集. 若从 E 中任意选取不同的数所组成的无穷正项级数总是收敛的, 试证明 E 是可数集.

证明. 设 $E_k=\{x\in E:x\geqslant 1/k\}$, 则 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$. 若 E_k 有限, 则命题显然成立. 若 E_k 是无限集, 则可以从 E_k 中取出一个各项互不相同的数列 $\{a_k\}$, s.t. $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty$, 矛盾. 所以 E_k 有限, 进而 E 是可数集. □

思考题 9. 试问: 直线上所有开区间的全体形成的集合的基数是什么? (设法与平面点集对应)

解. 设集合 $\mathscr{A}=\{(a,b):a,b\in\mathbb{R},a<b\}$, 它与 $A=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2:a<b\}$ 一一对应. 因为 $\mathbb{R}\sim\{(a,a+1):a\in\mathbb{R}\}\subset A\subset\mathbb{R}^2\sim\mathbb{R}$, 所以 $\overline{\overline{\mathscr{A}}}=\aleph_1$. □

思考题 10. 设 $E\subset\mathbb{R}^2$ 是不可数集, 试证明存在 $x_0\in E$, 使得对于任一内含 x_0 的圆邻域 $B(x_0)$, 点集 $E\cap B(x_0)$ 为不可数集.

证明. 反证. 若不然, $\forall x\in E,\delta_x>0$, s.t. $E\cap B(x,\delta_x)$ 为可数集. 于是 $E\subset\bigcup_{x\in E}B(x,\delta_x)\xrightarrow{\text{Lindelöf}}E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}B(x_i,\delta_{x_i})\implies E=\bigcup_{i=1}^{\infty}[E\cap B(x_i,\delta_{x_i})]$ 可数, 与题设矛盾. □

-思考题 11-. 设 $E\subset\mathbb{R}$, 且 $\overline{\overline{E}}<c$, 试证明存在实数 a, 使得 $E+\{a\}=\{x+a:x\in E\}\subset\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.($a\notin\mathbb{Q}-E:=\{x-y:x\in\mathbb{Q},y\in E\}$)

证明. 由 $\mathbb{Q}-E=\{x-y:x\in\mathbb{Q},y\in E\}=\bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\{x-y:y\in E\}$ 和习题 1 第 12 题的逆否命题知 $\mathbb{Q}-E$ 的基数小于 c. 取 $a\notin\mathbb{Q}-E$, 则 $a\neq x-y,\forall x\in\mathbb{Q},\forall y\in E$, 所以 $a+y\neq x,\forall x\in\mathbb{Q},\forall y\in E\implies E+\{a\}\subset\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. □

-思考题 13-. 试问: 是否存在集合 E, 使得 $\mathscr{P}(E)$ 是可列集?

证明. 不存在. 如果 $\overline{\overline{E}}=n$, 则 $\mathscr{P}(E)$ 的基数为 2^n, 这是有限集而非可列集; 如果 E 无限, 则存在一个可列子集 F. 考虑 $[0,1]$ 中小数的二进制表示法 $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}(a_n=0\text{ or }1)$ 以及一一映射

$$f:\mathscr{P}(F)\to[0,1],A\mapsto 0.x_1\cdots x_n\cdots,\text{where }x_n=\begin{cases}1,&x\in A\\0,&x\notin A\end{cases}$$

我们得到 $\overline{\overline{\mathscr{P}(E)}}\geqslant\overline{\overline{\mathscr{P}(F)}}=2^{\aleph_0}>\aleph_0$, 故 $\mathscr{P}(E)$ 不是可数集. □

-思考题 14-. 试证明全体超越数 (即不是整系数方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 的根) 的基数是 c.(你知道的超越数是什么?)

证明. $\mathbb{Z}[x]=\{0\}\cup\bigcup_{n=0}^{\infty}\{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0:a_i\in\mathbb{Z},a_n\neq 0\}\sim\{0\}\cup\bigcup_{n=0}^{\infty}(\mathbb{Z}\backslash\{0\})\times\mathbb{Z}^n\implies$ 整系数多项式全体是可列集. 因此全体代数数的集合 A 作为可数个有限集的并, 是可数的. 又 $\mathbb{R}=A\cup A^c$, 由习题 1 的 12 题的逆否命题知超越数全体 A^c 的基数是 c. 超越数有 π,e 等. □

1.4 $\mathbb{R}^n$ 中点与点之间的距离 · 点集的极限点

(二) 点集的极限点

思考题 1. 设 $E \subset \mathbb{R}$ 是不可数集, 则 $E' \neq \varnothing$.

证明. 反证, 若 $E' = \varnothing$, 则 $x \in E \implies x \notin E' \implies \exists \delta_x > 0$, s.t. $(B_{\delta_x}(x) \backslash \{x\}) \cap E = \varnothing \implies B_{\delta_x}(x) \cap E = \{x\}$. 由 $E \subset \bigcup\limits_{x \in E} B_{\delta_x}(x)$ 及 Lindelöf 定理 (引理 1.20) 知

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{\delta_{x_i}}(x_i) \implies E = \bigcup_{i=1}^{m} [E \cap B_{\delta_{x_i}}(x_i)] = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x_i\},$$

其中 $m \in \mathbb{N}^+$ 或 $m = \infty$. 于是 E 是可数集, 与题设矛盾. □

思考题 2. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 E' 是可数集, 则 E 是可数集.

证明. $x \in E\backslash E' \implies x \in E, \exists \delta_x > 0$, s.t. $(B_{\delta_x}(x) \backslash \{x\}) \cap E = \varnothing \implies \exists \delta_x$, s.t. $B_{\delta_x}(x) \cap E = \{x\}$. 由 $E\backslash E' \subset \bigcup\limits_{x \in E} B_{\delta_x}(x)$ 及 Lindelöf 定理知 $E\backslash E' \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_{\delta_{x_i}}(x_i) \implies E\backslash E' = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \left[(E\backslash E') \cap B_{\delta_{x_i}}(x_i)\right] = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$, 其中 $m \in \mathbb{N}^+$ 或 $m = \infty$. 于是 $E\backslash E'$ 是可数集. 所以 $E = (E\backslash E') \cup E'$ 是可数集. □

-思考题 3-. 若 $E \subset (0, +\infty)$ 中的点不能以数值大小加以排列, 则 $E' \neq \varnothing$.

证明. 考查区间 $I_1 = [0,1], I_2 = [0,2], \cdots, I_n = [0,n], \cdots$, 由题设知必存在 n_0, 使得 $I_n \cap E$ 包含无限个点. 从而知 $E' \neq \varnothing$. □

-思考题 4-. 设 $\{a_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界点列, 且有

$$|a_n - a_{n+1}| \geqslant 1 \ (n = 1, 2, \cdots),$$

则 $\{a_n\}$ 也可能有无穷多个极限点 ($1/n + 1/m$ 与 $1/n + 1/m + 4$).

证明. 设 $\{a_n\}$ 为 (从左往右, 从上往下)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1} + \frac{1}{1};\\
&\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + 4, \frac{1}{2} + \frac{1}{2};\\
&\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + 4, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 4, \frac{1}{4} + \frac{1}{3}, \cdots;\\
&\cdots
\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{i}+\frac{1}{n}+4$ 是第 n 行第 i 列, 且 $|a_n-a_{n+1}|\geqslant 4-1-1>1$. 而 $\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right\}_{n=2}^{\infty}$ 有极限 $\frac{1}{2}$, $\left\{1+\frac{1}{n}+4\right\}_{n=2}^{\infty}$ 有极限 $5,\cdots$, 所以 $\{a_n\}$ 有无穷多个极限点. □

-思考题 5-. 若 $E\subset\mathbb{R}^2$ 中任意两点间的距离均大于 1, 则 E 是可数集.

证明. 由题, $\forall x\in E, E\cap B(x,1)=\{x\}$. 故由 Lindelöf 定理知

$$E\subset\bigcup_{x\in E}B(x,1)\implies E\subset\bigcup_{i=1}^{\lambda}B(x_i,1)\implies E=\bigcup_{i=1}^{\lambda}E\cap B(x_i,1)=\bigcup_{i=1}^{\lambda}\{x_i\},$$

其中 $\lambda\in\mathbb{N}$ 或 $\lambda=\infty$. □

1.5 $\mathbb{R}^n$ 中的基本点集: 闭集 · 开集 · Borel 集 · Cantor 集

(一) 闭集

-思考题 1-. 设 $E\subset\mathbb{R}$ 是非空点集. 若 E 中任一子集皆为闭集, 试问 E 是有限集吗?

解. 不一定, 令 $E=\mathbb{N}$. □

-思考题 2-. 设 A,B 是 $\mathbb{R}$ 中点集, 试问: 等式 $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cap\bar{B}$ 一定成立吗?

解. 不一定, 令 $A=(0,1),B=(1,2)$. □

-思考题 3-. 设 $E_k\subset\mathbb{R}^n(k=1,2,\cdots)$, 令 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$. 若有 $x_0\in E'$, 试问: 是否一定存在 E_{k_0}, 使得 $x_0\in E'_{k_0}$?

解. 不一定, 令 $E_k=\{1/k\},x_0=0$. □

思考题 4. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 试证明 $\bar{E}$ 是包含 E 的一切闭集 F 之交:

$$\bar{E}=\bigcap_{F\supset E}F.$$

证明. 一方面, 闭集的任意交是闭集, 因为 $\bar{E}$ 也是包含 E 的闭集, 故 $\bar{E}\supset\bigcap\limits_{F\supset E}F$. 另一方面, 因为 $E\subset\bigcap\limits_{F\supset E}F$, 所以 $\bar{E}\subset\overline{\bigcap\limits_{F\supset E}F}=\bigcap\limits_{F\supset E}F$. 于是 $\bar{E}=\bigcap\limits_{F\supset E}F$. □

-思考题 5-. 设 $F\subset\mathbb{R}$ 是有界闭集, $f(x)$ 是定义在 F 上的 (实值) 函数. 若对任意的 $x_0\in F'$, 均有 $f(x)\to+\infty$ ($x\in F$ 且 $x\to x_0$), 试证明 F 是可数集. ($F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x:f(x)\leqslant n\}$)

证明. 设 $F_n=\{x\in F:f(x)\leqslant n\}$, 则由 f 是实值函数知 $F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$. 用反证法证明 F_n 是有限集, 从而 F 是可数集. 事实上, 若 F_n 是无限集, 则由定理 1.15(Bolzano-Weierstrass), $\exists\{x_k\}\subset F_n, x_0\in F'_n\subset F'$, s.t. $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x_0$. 因为 $f(x_k)\leqslant n$, 所以 $f(x)\leqslant n$, 矛盾. □

-思考题 6-. 设 $f \in C(\mathbb{R})$, 试证明 $F = \{(x,y) : f(x) \geqslant y\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集.

证明. 设 $F \ni (x_k, y_k) \to (x_0, y_0)$, 则由 $f(x_k) \geqslant y_k$, 令 $k \to \infty$ 有 $f(x_0) \geqslant y_0 \implies (x_0, y_0) \in F$. 所以 F 是闭集. □

-思考题 7-. 试在 $\mathbb{R}$ 中做出可列个互不相交的稠密可列集.

解. 设所有素数为 $\{p_k\}$, 作 $\mathbb{R}$ 的稠密可列集 $D_k = \mathbb{Q}+\{\sqrt{p_k}\}, k = 1, 2, \cdots$, 则集列 $\{D_k\}$ 是互不相交的. 否则若 $D_k \cap D_l \neq \varnothing (k \neq l)$, 则 $\exists r, s \in \mathbb{Q}$, s.t. $r+\sqrt{p_k} = s+\sqrt{p_l} \implies r-s = \sqrt{p_l}-\sqrt{p_k}$. 两边平方得 $(r-s)^2 = p_l + p_k - 2\sqrt{p_l p_k}$, 此即 $\sqrt{p_l p_k} = [p_l + p_k - (r-s)^2]/2 \in \mathbb{Q}$, 但这是不可能的. □

(二) 开集

-思考题 2-. 试证明函数

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin(1/y), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

的不连续点集不是闭集.

证明. 设 f 的不连续点集为 D. 因为 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y\neq 0}} x\sin\frac{1}{y} = 0$, 所以 $(0,0) \notin D$. 又对任意 $x \neq 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} x\sin\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} = 0 \neq x = \lim_{n\to\infty} x\sin\frac{1}{\frac{1}{2n\pi+\pi/2}},$$

所以 $(x, 0) \in D$. 因此 $\forall k \in \mathbb{N}_+, (1/k, 0) \in D$, 但是该点列的极限点 $(0,0) \notin D$, 这说明 D 不是闭集. □

-思考题 4-. 设 $G \subset \mathbb{R}^n$ 是非空开集, $r_0 > 0$. 若对任意的 $x \in G$, 作闭球 $\overline{B(x, r_0)}$, 试证明 $A = \bigcup\limits_{x\in G} \overline{B(x, r_0)}$ 是开集.

证明. 设 $a \in A$, 则 $\exists x \in G, a \in \overline{B(x, r_0)}$. 因为 G 是开集, 所以 $\exists \delta_x > 0$, s.t. $B(x, \delta_x) \subset G$. 设 $b \in B(a, \delta_x)$, 则 $|b-a| < \delta_x$. 令 $y = b + x - a$, 则 $|y - x| = |b - a| < \delta_x$, 进而 $y \in B(x, \delta_x) \subset G$, $|y - b| = |x - a| \leqslant r_0$. 因此 $y \in G$, 且 $b \in \overline{B(y, r_0)} \implies b \in A$. 所以 $B(a, \delta_x) \subset A$, 故而 A 是开集. □

-思考题 5-. 设 $F \subset \mathbb{R}$ 是无限闭集, 试证明存在 F 中可数子集 E, 使得 $\bar{E} = F$.

证明. (i) 对任意的 $k \in \mathbb{N}$, 作开球列 $B_k = \{B(r, 1/k), r \in \mathbb{Q}\} (k \in \mathbb{N})$. 对 B_k 中的 $B = B(r, 1/k)$ 满足 $B \cap F \neq \varnothing$ 的球 B, 取 $B \cap F$ 中的一个点, 并记其全体为 A_k. 易知 A_k 是 F 的可数子集,$E := \bigcup\limits_{k\geqslant 1} A_k$ 也是 F 的可数子集. 因为 F 是闭集, 所以 $\bar{E} \subset F$.

(ii) 对任意的 $x \in F$, 以及 $k \in \mathbb{N}$, 使得 x 位于开球族 B_k 中的某个开球 B 内, 且 B 必含有 A_k 中的一个点, 也必含 E 中一个点. 从而 E 中某点距离点 x 小于 $2/k$. 由 k 的任意性可知 $x \in \bar{E}$, 即 $F \subset \bar{E}$.

综合 (i)(ii) 即可得证. □

思考题 6. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 中的每点都是 E 的孤立点, 试证明 E 是某开集和闭集的交集.

证明. 由题设,$E = E \backslash E' = (E \cup E') \backslash E' = \bar{E} \backslash E' = \bar{E} \cap (E')^c$, 其中前者是闭集, 后者是开集. □

-思考题 7-. 设在 $\mathbb{R}^n$ 中 $\{G_a\}$ 是 E 的一个开覆盖, 试问 $\{\bar{G}_a\}$ 能覆盖 $\bar{E}$ 吗?

解. 不一定. 设 $E = \{1/k : k = 1, 2, \cdots\}, G_k = (1/2k, 3/2k), k = 1, 2, \cdots$, 则 $\bar{E} = \{0\} \cup E, \bar{G}_k = [1/2k, 3/2k], k = 1, 2, \cdots$. 注意 $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k, 0 \notin \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k \implies \bar{E} \not\subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bar{G}_k$. □

-思考题 9-. 设 $F \subset \mathbb{R}$ 是非空可数闭集, 试证明 F 必含有孤立点.

证明. 反证, 若 F 没有孤立点, 则 $F \backslash F' = \varnothing$. 因此

$$F = (F \cap F') \cup (F \backslash F') = F \cap F' \subset F'.$$

又因为 F 是闭集, 所以 $F' = F, F$ 是非空完全集. 由书 p49 注 1 知 F 的基数为 c, 与题设 F 可数矛盾. □

思考题 10. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非负渐降连续函数列. 若在有界闭集 F 上 $f_n(x) \to 0 (n \to \infty)$, 试证明 $f_n(x)$ 在 F 上一致收敛于零.

证明. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \forall x \in F$ 知对任意固定 $\varepsilon > 0, \forall x \in F, \exists n_x$, s.t. $\forall n > n_x, 0 \leqslant f_n(x) < \varepsilon$. 又由 $f_{n_x} \in C(F)$ 及局部保号性知 $\exists \delta_x > 0$, s.t. $\forall x' \in B_{\delta_x}(x), 0 \leqslant f_n(x') < \varepsilon$. 由 $F \subset \bigcup\limits_{x \in F} B_{\delta_x}(x)$ 及有限覆盖定理知 $F = \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_{\delta_{x_i}}(x_i)$. 取 $N = \max\{n_{x_1}, \cdots n_{x_m}\}$, 则 $\forall n > N, \forall x \in F, \exists 1 \leqslant i \leqslant m$, s.t. $x \in B_{\delta_{x_i}}(x_i) \implies 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_N(x) \leqslant f_{n_{x_i}}(x) < \varepsilon$. 这就证明了 $f_n \rightrightarrows 0$ 于 F. □

-思考题 11-. 设 $F \subset \mathbb{R}$ 是闭集, 且 $f \in C(F)$, 则点集 $\{x \in F : f(x) = 0\}$ 是闭集.

证明. 记题设集合为 A, 设 $\{x_n\} \subset A, x_n \to x_0$. 因为 F 是闭集, 所以 $x_0 \in F$. 又因为 $f(x_n) = 0, f$ 连续, 所以 $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, 此即 $x_0 \in A$, 故 A 闭. □

-思考题 13-. 设 $E \subset \mathbb{R}$. 若每个 $f \in C(E)$ 都是有界函数, 则 E 是有界闭集; 若每个 $f \in C(E)$ 都在 E 上达到最大值, 则 E 是有界闭集.

证明. (i)$f(x) = x$ 是连续函数, 由此可知 E 有界. 假设 E 不是闭集, 则 $E' \not\subset E$, 于是存在 $x_0 \in E', x_0 \notin E$. 故有 E 上连续函数 $f(x) = \dfrac{1}{x - x_0}, x \in E$ 满足 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, 这与题设矛盾. (ii) 因为 $f(x) = x (x \in E)$ 在 E 上达到最大值, 故 $\exists x_0 \in E, \forall x \in E, f(x) \leqslant f(x_0) \implies x \leqslant x_0$. 对 $f(x) = -x$ 采取相同步骤便得到 E 是有界集. 假设 E 不是闭集, 则观察 (i) 中函数 $f(x) = 1/(x - x_0)$ 知其在 E 上没有最大值, 矛盾. □

-思考题 14-. 设定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对 E 中的任一有界闭集 K, 均有 $f \in C(K)$, 则 $f \in C(E)$.(若 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$, 则点集 $\{x_0, x_1, x_2, \cdots\}$ 是有界闭集.)

证明. □

(三)Borel 集

思考题 1. 试证明: 设 $f_n \in C([a,b])(n=1,2,\cdots)$, 且存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x), x\in[a,b]$, 则对任意的 $t\in\mathbb{R}$, 点集

$$\{x\in[a,b]: f(x)<t\}$$

是 F_σ 集.

证明. (i) 设 $E=\{x\in[a,b]: f(x)<t\}, E_{nk}=\{x\in[a,b]: f_n(x)\leqslant t-\frac{1}{k}\}$, 则

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}E_{nk}.$$

事实上, $x\in E \iff f(x)<t \iff \exists k$, s.t. $f(x)<t-\frac{1}{k} \iff \exists k, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)<t-\frac{1}{k} \overset{\text{保号性}}{\Longrightarrow} \exists k,N,\forall n\geqslant N, f_n(x)\leqslant t-\frac{1}{k} \implies x\in$ 右端. 另一方面, $x\in$ 右端 $\implies \exists k,N,\forall n\geqslant N, f_n(x)\leqslant t-\frac{1}{k} \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \exists k, f(x)\leqslant t-\frac{1}{k}\Rightarrow f(x)<t \implies f(x)<t \implies x\in E$.

(ii) 由 $f_n\in C([a,b])$ 知 E_{nk} 是闭集, 而 $\bigcap\limits_{n=N}^{\infty}E_{nk}$ 闭. 故 E 是可数个闭集之并, 为 F_σ 集. □

-思考题 2-. 设 $\{f_n(x)\}$ 是闭集 $F\subset\mathbb{R}$ 上的连续函数列, 则 $f_n(x)$ 在 F 上的收敛点集是 $F_{\sigma\delta}$ 集.

证明. 由 Cauchy 收敛准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在 $\iff \forall k,\exists N,\forall m,n\geqslant N, |f_m(x)-f_n(x)|\leqslant 1/k$. 于是 $f_n(x)$ 的收敛点集 $E=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=N}^{\infty}\bigcap\limits_{n=N}^{\infty}\{x\in F: |f_m(x)-f_n(x)|\leqslant 1/k\}$. 因为 $\{f_n(x)\}$ 连续, 所以 $\{x\in F: |f_m(x)-f_n(x)|\leqslant 1/k\}$ 是闭集, 进而 $\bigcap\limits_{m=N}^{\infty}\bigcap\limits_{n=N}^{\infty}\{x\in F: |f_m(x)-f_n(x)|\leqslant 1/k\}$ 也是闭集. 于是 E 是 $F_{\sigma\delta}$ 集. □

思考题 3. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 则点集

$$\{x\in\mathbb{R}: \lim_{y\to x} f(y)\text{存在}\}$$

是 G_δ 集.

证明. (i) 设 $\omega_\delta(x)=\sup\limits_{0<|y-x|<\delta} f(y)-\inf\limits_{0<|y-x|<\delta} f(y)$, 下证 $\lim\limits_{y\to x} f(y)$ 存在 $\iff \lim\limits_{\delta\to 0}\omega_\delta(x)=0$.

$\implies$. 若 $\lim\limits_{y\to x} f(y)$ 存在, 则由 Cauchy 收敛准则知,$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall y,y'\in B_\delta(x), |f(y)-f(y')|<\varepsilon \implies f(y')-\varepsilon<f(y)<f(y')+\varepsilon$. 取 $f(y')$ 的上确界和 $f(y)$ 的下确界知 $\sup\limits_{0<|y'-x|<\delta} f(y')-\varepsilon\leqslant \inf\limits_{0<|y-x|<\delta} f(y)\leqslant \sup\limits_{0<|y'-x|<\delta} f(y')+\varepsilon$, 此即 $0\leqslant\omega_\delta(x)\leqslant\varepsilon$. 这就证明了 $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega_\delta(x)=0$.

$\impliedby$. 若 $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega_\delta(x)=0$, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0, 0\leqslant\omega_\delta(x)=\sup\limits_{0<|y-x|<\delta} f(y)-\inf\limits_{0<|y-x|<\delta} f(y)<\varepsilon$. 故对 $\forall y,y'\in B_\delta(x), 0\leqslant|f(y)-f(y')|\leqslant\sup\limits_{0<|y-x|<\delta} f(y)-\inf\limits_{0<|y-x|<\delta} f(y)<\varepsilon$. 仍由 Cauchy 收敛准则, $\lim\limits_{y\to x} f(y)$ 存在.

(ii) 题设集合 $C=\{x\in\mathbb{R}:\lim\limits_{\delta\to 0}\omega_\delta(x)=0\}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}G_k$, 其中 $G_k=\{x\in\mathbb{R}:\lim\limits_{\delta\to 0}\omega_\delta(x)<\frac{1}{k}\}$. 下证 G_k 是开集, 进而 C 是 G_δ 集. 事实上,$x\in G_k \implies \lim\limits_{\delta\to 0}\omega_\delta(x)<\frac{1}{k}\implies \exists\delta>0, 0\leqslant \omega_\delta(x)<\frac{1}{k}\implies \forall y\in B_\delta(x), \lim\limits_{\delta'\to 0}\omega_{\delta'}(x)=\inf\limits_{\delta'>0}\omega_{\delta'}(y)\leqslant\omega_{\min\{|x-y|,\delta-|x-y|\}}(y)\leqslant\omega_\delta(x)<\frac{1}{k}$, 其中 $\min\{|x-y|,\delta-|x-y|\}$ 保证了 $\overset{\circ}{B}(y)\subset\overset{\circ}{B}(x)$. 所以 $\forall y\in B_\delta(x), y\in G_k\implies B_\delta(x)\in G_k$. □

-思考题 4-. (i) 定义在 $(0,1)$ 上的函数 $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ 不是连续函数列的极限;
(ii) $[a,b]$ 上的导函数 $f'(x)$ 的连续点在 $[a,b]$ 中稠密.

证明. (i) 反证, 若 $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ 是连续函数列的极限, 则由书 p44 例 15 知 $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ 的不连续点集 D 为第一纲集, 这与 $D=(0,1)$ 为第二纲集 (利用定理 1.23 导出矛盾即可) 矛盾.
(ii) 由 $f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x\pm\frac{1}{n})-f(x)}{\pm\frac{1}{n}}$ 知 $f'(x)$ 是连续函数列的极限, 从而不连续点集 D 为第一纲集. 于是

$$D=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k, \overset{\circ}{\overline{E}}_k=\varnothing.$$

因此 $D^c=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k^c$, 且 $\overline{E_k^c}=(\overset{\circ}{E}_k)^c\supset(\overset{\circ}{\overline{E}}_k)^c=\varnothing^c=[a,b]$. □

-思考题 6-. 设 $\{F_k\}\subset\mathbb{R}^n$ 是闭集列, 且 $\mathbb{R}^n=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k$, 则 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\overset{\circ}{F}_k$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

证明. 设 $x_0\in\mathbb{R}^n$, 对任意 $\delta>0$, 我们有

$$J_\delta:=[x_0-\delta,x_0+\delta]=\bigcup_{k=1}^{\infty}(J_\delta\cap F_k).$$

因为每个 $J_\delta\cap F_k$ 均为闭集, 故由 Baire 定理, 存在 $k_0\in\mathbb{N}$, 使得 $F_{k_0}\cap J_\delta$ 有内点 x_0, 于是 $x_0\in\overset{\circ}{F}_{k_0}\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\overset{\circ}{F}_k$. 由 x_0 和 δ 的任意性知 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\overset{\circ}{F}_k$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密. □

(四)Cantor (三分) 集

-思考题 1-. 设 $E\subset\mathbb{R}$ 是非空完全集, 试证明对任意的 $x\in E$, 存在 $y\in E$, 使得 $x-y$ 为无理数.

证明. 由书 p49 注 1 知 $\overline{\overline{E}}=c$, 所以对任意的 $x_0\in E$, $\{x_0-y:y\in E\}$ 是不可数集. 由此必然存在 $y_0\in E$, 使得 $x_0-y_0\notin\mathbb{Q}$. □

思考题 2. 试证明 $x=\frac{1}{4},\frac{1}{13}$ 属于 Cantor 集.

证明. 因为若将 $[0,1]$ 中实数按三进位小数展开, 则 Cantor 集中点 x 与下述三进位小数集的元

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}, a_i=0,2$$

一一对应, 且易得

$$\frac{1}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{2n}},\ \frac{1}{13}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{3n}}.$$

所以结论成立. □

-思考题 4-. 试作一孤立点集 E, 使得 E' 是完全集 (Cantor 集的补集的全部构成区间的中点).

证明. 命 E 是 Cantor 集的补集的全部组成区间的中点构成的集合, 则 E 是孤立点集, 且 $E'=C$ 是完全集. 事实上, 若 $x\in C$, 则 $\forall n, x\in F_n \implies \forall n, \exists 1\leqslant k\leqslant 2^n, x\in F_{n,k}$. 又因为 $F_{n,k}$ 的中点必然在 E 中, 所以存在 $x_{n,k}\in E, |x_{n,k}-x|\leqslant 1/3^n \implies x\in E'$. 另一方面, 若 $x\notin C$, 则 $\exists k\in\mathbb{N}, x\in I_k$. 若 x 是 I_k 的中点, 则 $I_k\cap E\backslash\{x\}=\varnothing$; 若 x 不是 I_k 的中点, 则 $B(x,\min\{|x-c|, d(x,\partial I_k)\})\cap E=\varnothing$, 其中 c 是 I_k 的中点. 无论哪种情况, 我们都有 $x\notin E'$. □

1.6 点集间的距离

思考题 1. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是一个非空点集. 若对任意的 $x\notin E$, 存在 $y\in E$, 使得 $d(x,y)=d(x,E)$, 试证明 E 是闭集.

证明. 反证, 若 E 不是闭集, 则存在 E 中点列 x_n, s.t. $x_n\to x\notin E(n\to\infty)$. 此时 $d(x,E)=\inf\limits_{n\geqslant 1} d(x,x_n)=0$. 然而另一方面, $\exists y\in E, d(x,y)=d(x,E) \implies d(x,y)=0 \implies E\ni y=x\notin E$, 矛盾. □

-思考题 2-. 设 $G\subset\mathbb{R}^n$ 是开集, F 是 G 内的闭集, 试证明存在 $r>0$, 使得

$$\{x: d(x,F)\leqslant r\}\subset G.$$

证明. 易知 G^c 是闭集, 又 F 是有界闭集, 且有 $F\cap G^c=\varnothing$, 所以由推论 1.26, $\exists x_1\in F, x_2\in G^c, d(x_1,x_2)=d(F,G^c)>0$. 取 $r=d(x_1,x_2)$, 则当 $d(x,F)<r$ 时应有 $x\in G$, 否则 $d(x,F)\geqslant d(G^c,F)=r$, 矛盾. 故命题得证. □

-思考题 3-. 试问: 平面中的圆盘 $\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 1\}$ 能表示为两个不同 (注: 这里应该是不交) 的非空闭集之并吗?

证明. 不能. 反证, 假定 $F=F_1\cup F_2, F_1\cap F_2=\varnothing$, 其中 F_1 与 F_2 是闭集, 则知存在 $x_1\in F_1, x_2\in F_2$, 使得 $d(x_1,x_2)=d(F_1,F_2)>0$. 考虑点 x_1 与 x_2 的联结直线段 $[x_1,x_2]=\{(1-t)x_1+tx_2: 0\leqslant t\leqslant 1\}\subset F$. 记 $t_0=\sup\{t:(1-t)x_1+tx_2\in F_1\}$, 则由 F_1 是闭集知 $(1-t_0)x_1+t_0x_2\in F_1$. 另一方面, 由 $x_2\in F_2$ 知 $t_0<1$. 又由 t_0 的定义,$\forall t\in(t_0,1], (1-t)x_1+tx_2\in F_2$, 再由 F_2 闭知 $(1-t_0)x_1+t_0x_2\in F_2$, 矛盾. □

-思考题 4-. 试证明定义在区间 $(0,1]$ 上的函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 不能延拓为 $(-\infty,\infty)$ 上的连续函数.

证明. 反证, 若 $y=\sin(1/x)$ 能延拓为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 g, 则

$$g(0)=\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x}.$$

但是 $\lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$ 不存在, 矛盾. 我们还有拓扑学的做法, 这里不做介绍了. $\square$

习题 1

1. 设 $\{f_j(x)\}$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数列, 试用点集 $\{x: f_j(x)\geqslant 1/k\}(j,k=1,2,\cdots)$ 表示点集 $\{x:\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}f_j(x)>0\}$.

解. $\{x:\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}f_j(x)>0\}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=N}^{\infty}\{x: f_j(x)>1/k\}$. 事实上, 若 $x_0\in\{x:\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}f_j(x)>0\}$, 则存在 k_0, 使 $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}f_j(x_0)>1/k_0$, 再由数列上极限的定义, 对于任何正整数 N, 存在 $n_N\geqslant N, f_{n_N}(x_0)\geqslant 1/k_0$, 因此 $x_0\in\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=N}^{\infty}\{x: f_j(x)>1/k_0\}$, 从而 $x_0\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=N}^{\infty}\{x: f_j(x)>1/k\}$; 反之, 若 $x_0\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=N}^{\infty}\{x: f_j(x)>1/k\}$, 则存在 $k_0\in\mathbb{N}$, 使 $x_0\in\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=N}^{\infty}\{x: f_j(x)>1/k_0\}$, 因此对任何正整数 N, 都存在 $j\geqslant N, x_0\in\{x: f_j(x)>1/k_0\}$, 即 $f_j(x_0)\geqslant 1/k_0$, 所以 $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}f_j(x_0)\geqslant 1/k_0>0$, 即 $x_0\in\{x:\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}f_j(x)>0\}$. $\square$

-2-. 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数列,$E\subset[a,b]$, 且有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\chi_{[a,b]\setminus E}(x), x\in[a,b]$. 若令 $E_n=\left\{x\in[a,b]: f_n(x)\geqslant\dfrac{1}{2}\right\}$, 试求集合 $\lim\limits_{n\to\infty}E_n$.

解. 设全集为 $[a,b]$, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in E^c,\\ 0, & x\in E.\end{cases}$$

所以 $x\in E^c\iff\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=1\iff\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n\geqslant N,|f_n(x)-1|<\varepsilon\implies\exists N,\forall n\geqslant N, f_n(x)>1/2\iff\exists N,\forall n\geqslant N, x\in E_n\implies x\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n$. 另一方面, $x\in E\iff\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0\iff\exists N,\forall n\geqslant N, f_n(x)<1/2\implies\exists N,\forall n\geqslant N, x\in E_n^c\implies x\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n^c=(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n)^c$. 由此可得 $E^c\subset\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n\subset E^c\implies\lim\limits_{n\to\infty}E_n=E^c=[a,b]\setminus E$. $\square$

3. 设有集合列 $\{A_n\},\{B_n\}$, 试证明:
(i) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(A_n\cup B_n)=\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\right)\cup\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}B_n\right)$;
(ii) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(A_n\cap B_n)=\left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\right)\cap\left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}B_n\right)$.

证明. (i) 先证 $\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\right)\cup\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}B_n\right)\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(A_n\cup B_n)$.

$A_k\subset A_k\cup B_k(\forall k\geqslant n)\implies\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k\subset\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}(A_k\cup B_k)\implies\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k\subset\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}(A_k\cup B_k)\implies\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(A_n\cap B_n)$. 同理 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}B_n\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(A_n\cap B_n)$, 故上述等式得证.

而另一方面,

$$
\begin{aligned}
&\varlimsup_{n\to\infty}(A_n\cup B_n)\subset\left(\varlimsup_{n\to\infty}A_n\right)\cup\left(\varlimsup_{n\to\infty}B_n\right)\\
\Longleftrightarrow\ &\left[\left(\varlimsup_{n\to\infty}A_n\right)\cup\left(\varlimsup_{n\to\infty}B_n\right)\right]^c\subset\left[\varlimsup_{n\to\infty}(A_n\cup B_n)\right]^c\\
\Longleftrightarrow\ &\varliminf_{n\to\infty}A_n^c\cap\varliminf_{n\to\infty}B_n^c\subset\varliminf_{n\to\infty}(A_n\cup B_n)^c\iff\varliminf_{n\to\infty}A_n^c\cap\varliminf_{n\to\infty}B_n^c\subset\varliminf_{n\to\infty}(A_n^c\cap B_n^c).
\end{aligned}
$$

事实上,

$$
x\in\varliminf_{n\to\infty}A_n^c\cap\varliminf_{n\to\infty}B_n^c\Longrightarrow\begin{cases}\exists N_1,\forall n\geqslant N_1,x\in A_n^c,\\ \exists N_2,\forall n\geqslant N_2,x\in B_n^c,\end{cases}
$$

$$
\Longrightarrow\exists N=\max\{N_1,N_2\},\ \text{s.t. }\forall n\geqslant N,x\in A_n^c\cap B_n^c\ \Longrightarrow\ x\in\varliminf_{n\to\infty}\left(A_n^c\cap B_n^c\right).
$$

命题得证.

(ii) $\varliminf\limits_{n\to\infty}(A_n\cap B_n)=\left[\varlimsup\limits_{n\to\infty}(A_n^c\cup B_n^c)\right]^c\overset{\text{(i)}}{=\!=}\left[\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n\cup\varlimsup\limits_{n\to\infty}B_n^c\right]^c=\left(\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n\right)\cap\left(\varliminf\limits_{n\to\infty}B_n\right).$ □

4. 设 $f:X\to Y,A\subset X,B\subset Y$, 试问: 下列等式成立吗?

(i) $f^{-1}(Y\backslash B)=f^{-1}(Y)\backslash f^{-1}(B)$;

(ii) $f(X\backslash A)=f(X)\backslash f(A)$.

解. (i) 成立. 事实上 $x\in f^{-1}(Y\backslash B)\iff f(x)\in Y\backslash B\iff f(x)\notin B\iff x\notin f^{-1}(B)\iff x\in f^{-1}(Y)\backslash f^{-1}(B)$.

(ii) 不成立, 当 $f(A)\cap f(A^c)\neq\varnothing$ 时. 例如,$X=Y=\{1,2\},A=\{1\},f(1)=1,f(2)=1$, 此时有 $f(X\backslash A)=f(\{2\})=\{1\}\neq\varnothing=\{1\}\backslash\{1\}=f(X)\backslash f(A)$. □

5. 试作开圆盘 $\{(x,y):x^2+y^2<1\}$ 与闭圆盘 $\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$ 之间的一一对应.

解. 设 $D=\{(x,y):x^2+y^2<1\},E=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\},C_k=\{(x,y):x^2+y^2=\dfrac{1}{k}\}(k=1,2,\cdots)$, 则 $C_k\sim C_{k+1},\forall k$. 而 $\{2,3,\cdots\}\sim\{1,2,\cdots\}\implies\bigcup\limits_{k=2}^{\infty}C_k\sim\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}C_k$, 进而由

$$
\begin{array}{rccc}
D= & \bigcup_{k=2}^{\infty}C_k & \cup & (D\backslash\bigcup_{k=2}^{\infty}C_k)\\
 & \updownarrow(\text{对等}) & & \|\\
E= & \bigcup_{k=1}^{\infty}C_k & \cup & (D\backslash\bigcup_{k=2}^{\infty}C_k)
\end{array}
$$

知 $D\sim E$. □

-6-. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界. 若 $f(x)$ 是保号的 (即当 $f(x_0)\geqslant 0$ 时, 必有 $\delta_0>0$, 使得 $f(x)\geqslant 0(x_0-\delta<x<x_0+\delta)$), 试证明 $f(x)$ 的不连续点集是可数的.

证明. 本题有错误, 有反例 $f(x)=D(x)+1=\chi_{\mathbb{Q}}(x)+1,x\in(0,1)$. □

7. 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的实值函数, 且存在常数 M, 使得对于 $[0,1]$ 中任意有限个数 $x_1,\cdots,x_n$, 均有

$$|f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)|\leqslant M,$$

试证明集合 $E=\{x\in[0,1]:f(x)\neq 0\}$ 是可数集.

证明. 令 $a>0$, 记 $E_a^+=\{x\in[0,1]:f(x)>a\}, E_a^-=\{x\in[0,1]:f(x)<-a\}$; 则 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x\in[0,1]:|f(x)|>1/n\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E_{1/n}^+\cup E_{1/n}^-)$. 对任意 n, 取 $E_{1/n}^+$ 中的 p 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_p$, 则 $p\cdot\dfrac{1}{n}<|f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_p)|\leqslant M \implies p<nM$, 所以 $E_{1/n}^+$ 只含有限个数, 同理 $E_{1/n}^-$ 也只含有限个数, 由此可得 E 可数. □

8. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值函数. 如果对于任意的 $x_0\in\mathbb{R}$, 必存在 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $f(x)\geqslant f(x_0)$, 试证明集合 $E=\{y:y=f(x)\}$ 是可数集.

证明. 取 $y\in E$, 则 $\exists x\in\mathbb{R}$, s.t. $f(x)=y$. 由题意, $\exists\delta_x>0$, s.t. $f(z)\geqslant f(x),\forall z\in U_{\delta_x}(x)$; 取有理数 r_x,R_x, 满足 $x-\delta_x<r_x<x<R_x<x+\delta_x$, 如此就建立了 y 与 (r_x,R_x) 的映射 $f:E\to\mathbb{Q}^2, y\mapsto(r_x,R_x)$. 令 $y_1,y_2\in E, y_1\neq y_2, \exists x_1,x_2\in\mathbb{R}$, s.t. $f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2$. 若 $(r_{x_1},R_{x_1})=(r_{x_2},R_{x_2})$, 由题意, $f(x_1)\geqslant f(x_2), f(x_2)\geqslant f(x_1)$, 即 $f(x_1)=f(x_2)$, 矛盾, 故 f 是单射. 又因为 $E\sim f(E)=\{(r_x,R_x):x\in\mathbb{R},\exists y\in E, \text{s.t. } f(x)=y\}\subset\mathbb{Q}^2$, 故 E 是可数集. □

9. 设 E 是三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的点集, 且 E 中任意两点的距离都是有理数, 试证明 E 是可数集.

证明. 设 $Q=\{r_n\}$, 取定 E 中不同三点 x_0,y_0,z_0, 作三个球 $B_{r_k}(x_0),B_{r_l}(y_0),B_{r_m}(z_0)$, 则 E 中的其余点必属于三个球面的交点. 而三个球面至多有两个交点, 则 $E=\{x_0,y_0,z_0\}\bigcup\limits_{(r_k,r_l,r_m)\in\mathbb{Q}_+^3}\{x:x\in E\cap B_{r_k}(x_0)\cap B_{r_l}(y_0)\cap B_{r_m}(z_0)\}$ 是可数集. □

-11-. 设 $\{f_a(x)\}_{a\in I}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的实值函数族. 若存在 $M>0$, 使得

$$|f_\alpha(x)|\leqslant M, x\in[a,b], \alpha\in I,$$

试证明对 $[a,b]$ 中任一可数集 E, 总有函数列 $\{f_{\alpha_n}(x)\}$, 存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\{f_{\alpha_n}(x)\}, x\in E.$$

证明. 不妨记 $E:=\{x_1,\cdots,x_m,\cdots\}$, 因而 $|f_\alpha(x_1)|\leqslant M, \alpha\in I$. 由 Bolzano-Weierstrass 定理, 存在 $\{f_{\alpha_n^1}\}_{n=1}^\infty\subset\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $\lim\limits_{n\to\infty}f_{\alpha_n^1}(x_1)$ 存在. 又因为 $|f_{\alpha_n^1}(x_2)|\leqslant M(\forall n)$, 所以 $\exists\{f_{\alpha_n^2}\}_{n=1}^\infty\subset\{f_{\alpha_n^1}\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}f_{\alpha_n^2}(x_2)$ 存在. 这样的操作可以继续下去. 如果 E 是有限集, 不妨设元素个数为 m, 则上述操作进行 m 步后停止, 就有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_{\alpha_n^m}(x_m)$ 存在; 若 E 为无穷集, 则利用对角线法则选取子函数列 $\{f_{\alpha_m^m}\}_{m=1}^\infty$, 就有 $\lim\limits_{m\to\infty}f_{\alpha_m^m}(x)$ 存在, $x\in E$. □

-12-. 设 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 若 $\overline{\overline{E}}=c$, 试证明存在 n_0, 使得 $\overline{\overline{A_{n_0}}}=c$.

证明. 因为 $\overline{\overline{E}} = c$, 故不妨设 $E = \mathbb{R}^{\infty} = \{(x_1, x_2, \cdots) : x_1 \in \mathbb{R}\}$. 反证, 若对任意 n 都有 $\overline{\overline{A_n}} < c$, 则其每个分量的集合 $A_{n,i}$ 的基数都小于 c. 于是对任意 i, 存在 $x_i \in \mathbb{R}, x_i \notin A_{n,i}$. 显然 $(x_1, x_2, \cdots) \in E$ 但不在任何一个 A_n 中, 这与题设矛盾. □

-13-. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的递增函数, 试证明点集

$$E = \{x : 对于任意的\ \varepsilon > 0, 有\ f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon) > 0\}$$

是 $\mathbb{R}$ 中的闭集.

证明. 提示: 对任意 $x \in E'$, 往证 $f(x+\varepsilon) > f(x-\varepsilon)$. □

14. 设 $F \subset \mathbb{R}^n$ 是有界闭集,E 是 F 的一个无限子集, 试证明 $E' \cap F \neq \varnothing$. 反之, 若 $F \subset \mathbb{R}^n$, 且对于 F 中任一无限子集 E, 有 $E' \cap F \neq \varnothing$, 试证明 F 是有界闭集.

证明. 因为 $E \subset F$, 所以 E 是有界无限点集, 故 E 中存在收敛子列, 于是 $E' \neq \varnothing$. 又 F 是闭集, 所以 $E' \subset F' \subset F \implies E' \cap F \neq \varnothing$.
反之,$\forall x \in F', \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$, s.t. $x_n \to x (n \to \infty)$, 记 $E = \{x_n : n = 1, 2, \cdots\}$, 则 $E' = \{x\}$, 由题意,$E' \cap F \neq \varnothing$, 所以 $x \in F$, 即 F 是闭集. 假设 F 无界, 则 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in F$, s.t. $\|x_n\| > n$ 且 x_n 互异, 记 $E = \{x_n : n = 1, 2, \cdots\}$, 易知 $E' = \varnothing$, 与 $E' \cap F \neq \varnothing$ 矛盾, 故 F 有界. □

15. 设 $F \subset \mathbb{R}^n$ 是闭集,$r > 0$, 试证明点集

$$E = \{t \in \mathbb{R}^n : 存在 x \in F, 使得 |t - x| = r\}$$

是闭集.

证明. $\forall t \in E', \exists \{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$, s.t. $t_n \to t (n \to \infty)$. 由题意, $\forall n, \exists x_n \in F$, s.t. $|t_n - x_n| = r$. 于是由 $\{t_n\}$ 有界知 $\{x_n\}$ 有界, 从而 $\{x_n\}$ 存在收敛子列, 不妨记为 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. 故 $x_{n_k} \to x (k \to \infty), x \in F$. 于是 $|t - x| = \lim\limits_{k \to \infty} |t_{n_k} - x_{n_k}| = r$, 即 $t \in E$, 所以 E 为闭集. □

-17-. 设 $E \subset \mathbb{R}^2$, 称 $E_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ 为 E 在 $\mathbb{R}$ 上的投影 (集). 若 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是闭集, 试证明 E_y 也是闭集.

证明. $\forall x \in E_y', \exists \{x_n\} \subset E_y, x_n \to x (n \to \infty)$, 进而 $(x_n, y) \to (x, y) (n \to \infty)$. 由 E_y 的定义知 $\{(x_n, y)\} \subset E$, 且 E 是闭集, 所以 $(x, y) \in E$, 于是 $x \in E_y$. 所以 E_y 是闭集. □

18. 设 $f \in C(\mathbb{R}), \{F_k\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的递减紧集列, 试证明

$$f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f(F_k).$$

证明. 显然,$f\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k\right) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} f(F_k)$, 往证 $f\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k\right) \supset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} f(F_k)$.$\forall y \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} f(F_k)$, 记 $E = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}, F_{k,y} = E \cap F_k$, 因为 f 是连续的, 所以 E 是闭集; 又因为 $\{F_k\}$ 是紧集列, 所

以也是有界闭集列, 故 $\{F_{k,y}\}$ 是有界闭集列, 且由 $\{F_k\}$ 的递减性可以推出 $\{F_{k,y}\}$ 也是递减的. 由闭区间套定理, 存在 $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_{k,y} \subset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, 使 $f(x)=y$, 故 $y \in f\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k\right)$, 即 $f\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k\right) \supset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} f(F_k)$, 原命题得证. □

-19-. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有介值性. 若对任意的 $r \in \mathbb{Q}$, 点集 $\{x \in \mathbb{R} : f(x)=r\}$ 必为闭集, 试证明 $f \in C(\mathbb{R})$.

证明. 反证, 假设 f 不是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 则存在 $x_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ 以及 $\{x_n\}$, 满足 $|x_n - x_0| < 1/n, |f(x_n) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$. 不妨设 $f(x_n) \geqslant f(x_0) + \varepsilon > f(x_0)$, 则 $\exists r \in \mathbb{Q}, f(x_n) \geqslant f(x_0) + \varepsilon > r > f(x_0)$. 由 f 的介值性, 存在 ξ_n, 对任意 n, 有 $|\xi_n - x_0| \leqslant |x_n - x_0| < 1/n, f(\xi_n) = r$. 因此 $\xi_n \to x_0 (n \to \infty)$. 因为 $E := \{x \in \mathbb{R} : f(x) = r\}$ 为闭集, 所以 $x_0 \in E$, 与 $r > f(x_0)$ 矛盾. □

-20-. 设 E_1, E_2 是 $\mathbb{R}$ 中的非空集, 且 $E_2' \neq \varnothing$, 试证明

$$\bar{E}_1 + E_2' \subset (E_1 + E_2)'.$$

证明. 若 $x \in E_1 + E_2'$, 则存在 $y \in E_1, z \in E_2'$. 于是有各不相同的列 $\{z_n\} \subset E_2, z_n \to z (n \to \infty)$. 所以 $E_1 + E_2 \ni y + z_n \to y + z = x \implies x \in (E_1 + E_2)'$. 因为 $(E_1 + E_2)'$ 是闭集, 所以对任意 $y \in E_2', E_1 + \{y\} \subset (E_1 + E_2)'$, 故 $\bar{E}_1 + \{y\} = \overline{E_1 + \{y\}} \subset \overline{(E_1 + E_2)'} = (E_1 + E_2)'$. 由 $y \in E_2'$ 的任意性即得结论. □

-22-. 设 G_1, G_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的互不相交的开集, 试证明

$$G_1 \cap \bar{G}_2 = \varnothing.$$

证明. 反证. 假设 $G_1 \cap \bar{G}_2 \neq \varnothing$, 则 $\exists x \in G_1 \cap \bar{G}_2$. 因为 G_1 是开集,$G_1 \cap G_2 = \varnothing$, 所以 $x \in G_2'$, 且 $\exists B(x, \delta)$, s.t. $B(x, \delta) \subset G_1$. 所以 $B(x, \delta) \cap G_2 = \varnothing$, 这与 x 是 G_2 的极限点矛盾, 所以 $G_1 \cap \bar{G}_2 = \varnothing$. □

-23-. 设 $G \subset \mathbb{R}^n$. 若对任意的 $E \subset \mathbb{R}^n$, 有 $G \cap \bar{E} \subset \overline{G \cap E}$, 试证明 G 是开集.

证明. 取 $E = G^c$, 则 $G \cap \overline{G^c} \subset \overline{G \cap G^c} = \varnothing \implies \overline{G^c} \subset G^c \implies G^c$ 是闭集. 故 G 是开集. □

25. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 令

$$G_1 = \{(x, y) : y < f(x)\}, G_2 = \{(x, y) : y > f(x)\},$$

试证明 $f \in C(\mathbb{R})$ 当且仅当 G_1 与 G_2 是开集.

证明. 充分性. 要证 G_1 与 G_2 是开集, 只要证 G_1^c 与 G_2^c 是闭集.
$\forall (x, y) \in G_1^{c\prime}, \exists (x_n, y_n) \in G_1^c$, s.t. $(x_n, y_n) \to (x, y) (n \to \infty)$. 易知 $x_n \to x, y_n \to y (n \to \infty), y_n \geqslant f(x_n), \forall n$. 由 f 的连续性得 $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$, 所以 $(x, y) \in G_1^c$, 即 G_1^c 为闭集, 同理可证 G_2^c 也为闭集.

必要性. 由充分性假设 G_1^c 与 G_2^c 都是闭集. 下面用反证法证明 f 连续. 设存在 $x_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon_0 > 0, x_k \to x_0, |f(x_k) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0$. 不妨设 $f(x_k) \geqslant f(x_0) + \varepsilon_0$, 则 $(x_k, f(x_0) + \varepsilon_0) \in G_2^c$; 因为 $x_k \to x_0 (k \to \infty)$, 所以 $(x_k, f(x_0) + \varepsilon_0) \to (x_0, f(x_0) + \varepsilon_0)(k \to \infty)$, 由 G_2^c 是闭集可得 $(x_0, f(x_0) + \varepsilon_0) \in G_2^c$, 所以 $f(x_0) \geqslant f(x_0) + \varepsilon_0$, 矛盾, 所以假设不成立, 也即 $f \in C(\mathbb{R})$. □

-26-. 试问: 由 $\mathbb{R}$ 中的一切开集构成的集族的基数是什么?

解. 设 $\mathbb{R}$ 中一切开集构成的集族为 $\mathscr{O}$. 一方面, 由 $\mathscr{O} \supset \{(a, a+1) : a \in \mathbb{R}\} \sim \mathbb{R}$ 知 $\overline{\overline{\mathscr{O}}} \geqslant \aleph$. 另一方面, 注意到 $\mathbb{R}$ 中开集可以写成有限或可数个不交开区间的并, 而每个开区间 (a, b) 都可以表示为一列有理开区间之并, 即

$$O = \bigcup_{i=1}^{\lambda} \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_{ik}, s_{ik}) (\mathbb{Q} \ni r_{ik} \searrow a_i, \mathbb{Q} \ni s_{ik} \nearrow b_i), \lambda \in \mathbb{N}_+ \text{ or } \lambda = \infty, \forall O \in \mathscr{O}.$$

于是有单射

$$\mathscr{O} \ni O \mapsto \{(r_{ik}, s_{ik}) \in \mathbb{Q}^2 : 1 \leqslant i, k < \infty, \lim_{k \to \infty} r_{ik}, \lim_{k \to \infty} s_{ik} \text{ 存在 } \} \in \mathscr{P}(\mathbb{Q}^2) \sim \mathscr{P}(\mathbb{N}) \sim [0, 1].$$

由此 $\overline{\overline{\mathscr{O}}} \leqslant \aleph$. 综上即得 $\overline{\overline{\mathscr{O}}} = \aleph$. □

27. 设 $\{F_a\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一族有界闭集. 若任取其中有限个: $F_{a_1}, F_{a_2}, \cdots, F_{a_m}$, 都有

$$\bigcap_{i=1}^{m} F_{a_i} \neq \varnothing,$$

试证明: $\bigcap F_a \neq \varnothing$.

证明. 仍用反证法. $\bigcap_{i=1}^{m} F_{a_i} = \varnothing \implies F_{\alpha_1} \subset \mathbb{R}^n = \bigcup_{\alpha} F_{\alpha}^c \implies F_{\alpha_1} \subset \bigcup_{i=2}^{m} F_{\alpha_i}^c = \left(\bigcap_{i=2}^{m} F_{\alpha_i} \right)^c \implies \bigcap_{i=1}^{m} F_{\alpha_i} = F_{\alpha_1} \cap \bigcap_{i=2}^{m} F_{\alpha_i} \subset \left(\bigcap_{i=2}^{m} F_{\alpha_i} \right)^c \cap \bigcap_{i=2}^{m} F_{\alpha_i} = \varnothing$, 矛盾. □

-29-. 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是有界闭集, $\{B_k\}$ 是 K 的开球覆盖, 试证明存在 $\varepsilon > 0$, 使得以 K 中任一点为中心, ε 为半径的球必含于 $\{B_k\}$ 中的一个.

证明. 反证, 假设 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in K, B(x_n, 1/n) \not\subset B_k, \forall k \in \mathbb{N}$. 因为 K 是有界闭集, 所以 x_n 有收敛子列, 不妨仍记为 x_n, 且 $x_n \to x_0 (n \to \infty), x_0 \in K$. 因为 $\{B_k\}$ 是 K 的开球覆盖, 故 $\exists B_{k_i} \in \{B_k\}$ 和 $\varepsilon > 0$, s.t. $B(x_0, \varepsilon) \subset B_{k_i}$. 取 n 充分大, 满足 $|x_n - x_0| < \varepsilon/2$ 以及 $1/n < \varepsilon/2$, 则 $B(x_n, 1/n) \subset B(x_0, \varepsilon) \subset B_{k_i}$, 与假设矛盾, 原命题得证. □

-30-. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的可微函数, 且对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 点集 $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) = t\}$ 是闭集, 试证明 $f'(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

证明. 注意到导函数 $f'(x)$ 具有介值性 (Darboux 定理), 由习题 1.19 知结论成立. □

-32-. 试证明 $\mathbb{R}$ 中可数稠密集不是 G_δ 集.

证明. 反证, 设 $E=\{r_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中可数稠密集, 且 $E=\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$, 其中 O_n 是开集. 所以 $\mathbb{R}=E\cup E^c=\{r_n\}\cup\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n^c$. 由 $\{r_n\}$ 无内点, $(\overline{O_n^c})^\circ=(O_n^c)^\circ=\overline{O_n}^c \xlongequal{\bar{E}=\mathbb{R}} \mathbb{R}^c=\varnothing$ 知 $\mathbb{R}$ 是第一纲集. 这与 $\mathbb{R}$ 是第二纲集矛盾. □

-34-. 试证明在 $[0,1]$ 上不能定义如下的函数 $f(x)$: 在有理数上连续, 在无理数处不连续.

证明. 证法 1. 只需证明任何在 $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ 上连续的函数至少在一个无理点处连续. 记 $(0,1)$ 中有理点全体为 $Q=\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$, 又设 $\varepsilon_n=1/2^n$. 取 $r_1^*\neq r_1, r_1\in Q, f(x)$ 在 r_1^* 连续, 则对 ε_1 存在 $\delta_1>0$, 作 $I_1=(r_1^*-\delta_1,r_1^*+\delta_1)$, 使得 $r_1\notin I_1, |I_1|<1/2, I_1\subset(0,1)$, 且 $x\in I_1$ 时有 $|f(x)-f(x_1^*)|<\varepsilon_1$. 再取 $r_2^*\in I_1\cap\mathbb{Q}, r_2^*\neq r_2,r_1,r_1^*$, 因为 $f(x)$ 在 r_2^* 连续, 所以对 $\varepsilon_2,\exists\delta_2>0, I_2=(r_2^*-\delta_2,r_2^*+\delta_2)$, 使得 $r_1,r_1^*,r_2\notin\bar{I}_2, |I_2|<1/2^2, \bar{I}_2\subset I_1$, 且 $x\in I_2$ 时有 $|f(x)-f(r_2^*)|<\varepsilon_2$.
上述取法可以继续下去, 到第 n 步取 $r_n^*\in I_{n-1}, r_n^*\in Q, r_n^*\neq r_n,r_1,r_1^*,r_2,r_2^*,\cdots,r_{n-1},r_{n-1}^*$($I_{n-1}$ 内有无穷多个有理数可以保证这一点). 由 $f(x)$ 在 r_n^* 连续, 对 ε_n, 存在 $\delta_n>0$, 作 $I_n=(r_n^*-\delta_n,r_n^*+\delta_n)$, 使得 $r_n,r_1,r_1^*,\cdots,r_{n-1},r_{n-1}^*\notin\bar{I}_{n-1}, |I_n|<\frac{1}{2^n}, \bar{I}_n\subset I_{n-1}$, 且当 $x\in I_n$ 时有 $|f(x)-f(r_n^*)|<\varepsilon_n$. 如此得到闭区间套 $[0,1]\supset\bar{I}_1\supset\bar{I}_2\supset\cdots\supset\bar{I}_n\supset\cdots$, 且 $|I_n|<1/2^n\to0(n\to\infty)$, 由闭区间套定理,$\exists!x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bar{I}_n$, 下证 x_0 是无理点, 且 $f(x)$ 在 x_0 点连续.
首先, 若 x_0 为有理点, 则 $\exists n_0, x_0=r_{n_0}$. 取 $n\geqslant n_0$, 由前面取法知 $r_{n_0}\notin\bar{I}_n$, 但这与 $r_{n_0}=x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bar{I}_n\subset\bar{I}_n$ 矛盾. 其次, 因为 $x_0\in I_{n_0}$, 故 $\forall\varepsilon>0$, 可取 $\varepsilon_{n_0}<\varepsilon/2$, 再取 $\delta=\delta_{n_0}-|x_0-r_{n_0}^*|>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时,$|x-r_{n_0}^*|\leqslant|x-x_0|+|x_0-r_{n_0}^*|<\delta_{n_0}$, 所以 $|f(x)-f(x_0)|\leqslant|f(x)-f(r_{n_0}^*)|+|f(r_{n_0}^*)-f(x_0)|<2\varepsilon_{n_0}<\varepsilon$, 这就证明了 $f(x)$ 在无理点 x_0 连续, 原命题得证.
证法 2. 反证. 若存在这样的 f, 则 f 的连续点集为 $Q=[0,1]\cap\mathbb{Q}$. 由书 40 页例 11 知 Q 是 G_δ 集, 这与书 43 页例 13 的 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集矛盾. □

-35-. 试证明不存在满足下列条件的函数 $f(x,y)$:
(i)$f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数;
(ii) 偏导数 $\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y), \dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上处处存在;
(iii)$f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的任一点上都不可微.

证明. 假设某个 f 满足 (i) 和 (ii), 则由书 44 页例 15 知

$$f_x(x,y)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x+\frac{1}{n},y\right)-f(x,y)}{\frac{1}{n}}$$

的不连续点集 D_1 为第一纲集. 同理,f_y 的不连续点集 D_2 也是第一纲集. 故 $D=D_1\cup D_2$ 还是第一纲集, 即

$$D=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k, \overset{\circ}{\overline{E_k}}=\varnothing.$$

这只能是 $D \subsetneq \mathbb{R}^2$, 否则由 Baire 定理 $\mathbb{R}^2$ 无内点, 这是不可能的. 于是存在 (x_0, y_0), f_x, f_y 在该点连续, 进而在该点处可微, 与 (iii) 矛盾, $\square$

37. 试证明 $\mathbb{R}^n$ 中任一闭集皆为 G_δ 集, 任一开集皆为 F_σ 集.

证明. 设 F 是闭集, 令 $G_n = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, F) < 1/n\}$.
(i) G_n 是开集. $\forall x_0 \in G_n, d(x_0, F) < \dfrac{1}{n}, \exists y_0 \in F, d(x_0, y_0) = \delta < \dfrac{1}{n}$. 令 $\varepsilon = \dfrac{1}{n} - \delta, \forall x \in B(x_0, \varepsilon)$, $d(x, y_0) \leqslant d(x, x_0) + d(x_0, y_0) < \varepsilon + \delta = \dfrac{1}{n}$. 故 $d(x, F) \leqslant d(x, y_0) < \dfrac{1}{n} \implies x \in G_n, B(x_0, \varepsilon) \subset G_n$, 所以 G_n 是开集.
(ii) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n = F$. 显然 $F \subset G_n, \forall n \in \mathbb{N}^+$, 故 $F \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n; \forall x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n, d(x, F) < \dfrac{1}{n}, \forall n \implies d(x, F) = 0$. 因 F 是闭集, 故 $x \in F, \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n \subset F$.
综合 (i)(ii), F 是可数个开集的交集, 为 G_δ 集. 若 G 是开集, 则 G^c 是闭集, 所以有开集族 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使 $G^c = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, 所以 $G = (G^c)^c = \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n\right)^c = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n^c$, 而 G_n^c 为闭集, 故 G 为 F_σ 集. $\square$

-38-. 设 $f : [0, 1] \to [0, 1]$. 若点集

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in [0, 1]\}$$

是 $[0, 1] \times [0, 1]$ 中的闭集, 试证明 $f \in C([0, 1])$.

证明. 反证, 若 $f \notin C[0, 1]$, 则 $\exists x_0 \in [0, 1], \exists \varepsilon_0 > 0, \exists [0, 1] \ni x_k \to x_0, |f(x_k) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0$. 由 $f(x_k) \in [0, 1]$ 及 Bolzano-Weierstrass 定理知 $\exists k_j, l \in [0, 1], \lim\limits_{j\to\infty} f(x_{k_j}) = l$, 故 $(x_{k_j}, f(x_{k_j})) \to (x_0, l)$. 又因为 G_f 是闭集, 所以 $(x_0, l) \in G_f$, 因而 $l = f(x_0)$. 在第一行式子中取 $k = k_j$ 并令 $j \to \infty$, 得

$$0 = |f(x_0) - f(x_0)| = |\lim_{j\to\infty} f(x_{k_j}) - f(x_0)| = \lim_{j\to\infty} |f(x_{k_j}) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0,$$

这是一个矛盾. $\square$

39. 设 $F \subset \mathbb{R}$. 若对任意的 $f \in C(F)$, 必有在 $\mathbb{R}$ 上的连续延拓, 试证明 F 是闭集.

证明. 反证. 若 F 不是闭集, 则 $\exists F \ni x_n \to x_0 \notin F (n \to \infty)$. 由题设,$F$ 上的连续函数 $f(x) = \dfrac{1}{|x - x_0|^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上有连续延拓 $g(x)$. 于是 $g(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{|x_n - x_0|^2} = +\infty$. 矛盾. $\square$

40. 设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$, 且 $\bar{A} \cap B = \bar{B} \cap A = \varnothing$, 试证明存在开集 $G_A, G_B : G_A \cap G_B = \varnothing, G_A \supset A, G_B \supset B$.

证明. 先证明 $d(x, E) = d(x, \bar{E})$. 事实上, 由下确界定义知 $d(x, E) \geqslant d(x, \bar{E})$. 另一方面,$\forall \varepsilon > 0, \exists y \in \bar{E}, |x - y| < d(x, \bar{E}) + \varepsilon \implies E \ni y_n \to y (n \to \infty) \implies d(x, E) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} |x - y_n| \leqslant |x - y| < d(x, \bar{E}) + \varepsilon$. 令 $\varepsilon \to 0^+$ 得 $d(x, E) \leqslant d(x, \bar{E})$.

设 $G_A=\{x\in\mathbb{R}^n: d(x,B)-d(x,A)>0\}, G_B=\{x\in\mathbb{R}^n: d(x,A)-d(x,B)>0\}$, 则由 $d(\cdot,A), d(\cdot,B)$ 一致连续知 G_A, G_B 都是开集, 且由定义立得 $G_A\cap G_B=\varnothing$. 进一步有 $x\in A\implies x\notin\bar{B}\implies d(x,\bar{B})>0\implies d(x,B)-d(x,A)=d(x,\bar{B})-0>0\implies A\subset G_A$, 同理可得 $B\subset G_B$. $\square$

-41-. 设 F_1,F_2,F_3 是 $\mathbb{R}^n$ 中三个互不相交的闭集, 试作 $f\in C(\mathbb{R}^n)$, 使得
(i)$0\leqslant f(x)\leqslant 1$;
(ii)$f(x)=0(x\in F_1), f(x)=1/2(x\in F_2), f(x)=1(x\in F_3)$.

解. $f(x)=\dfrac{d(x,F_1\cup F_2)+d(x,F_1\cup F_3)}{d(x,F_1\cup F_2)+2d(x,F_1\cup F_3)+d(x,F_2\cup F_3)}, \forall x\in\mathbb{R}^n$. 容易验证分母不为零, f 连续, 且满足条件 (i)(ii). $\square$

2 Lebesgue 测度

2.1 点集的 Lebesgue 外测度

思考题 1. 设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 且 $m^*(A)=0$, 试证明对任意的 $B\subset\mathbb{R}^n$, 有

$$m^*(A\cup B)=m^*(B)=m^*(B\backslash A).$$

证明. 由外测度的单调性有 $A\cup B\supset B\supset B\backslash A\implies m^*(A\cup B)\geqslant m^*(B)\geqslant m^*(B\backslash A)$. 又由外测度的次可数可加性有 $m^*(A\cup B)\leqslant m^*(A)+m^*(B)=m^*(B), m^*(B)=m^*((B\backslash A)\cup(B\cap A))\leqslant m^*(B\backslash A)+m^*(B\cap A)\leqslant m^*(B\backslash A)+m^*(A)=m^*(B\backslash A)$. □

思考题 2. 设 $A,B\subset\mathbb{R}^n$, 且 $m^*(A),m^*(B)<+\infty$, 试证明

$$|m^*(A)-m^*(B)|\leqslant m^*(A\triangle B).$$

证明. $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$. 由 $m^*(A)\leqslant m^*(A\cup B)=m*((A\cap B)\cup(A\triangle B))$ 及次可数可加性知 $m^*(A)\leqslant m^*(A\cap B)+m^*(A\triangle B)\leqslant m(B)+m^*(A\triangle B)$, 于是 $m^*(A)-m^*(B)\leqslant m^*(A\triangle B)$. 同理可知 $m^*(B)-m^*(A)\leqslant m^*(B\triangle A)$. □

思考题 3. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$. 若对任意的 $x\in E$, 存在开球 $B(x,\delta_x)$, 使得 $m^*(E\cap B(x,\delta_x))=0$, 试证明 $m^*(E)=0$.

证明. $E\subset\bigcup\limits_{x\in E}B(x,\delta_x)\overset{\text{Lindelöf}}{\implies}E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B(x_i,\delta_{x_i})\implies m^*(E)=m^*\left(E\cap\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B(x_i,\delta_{x_i})\right)$. 由次可数可加性知 $m^*(E)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}m^*(E\cap B(x_i,\delta_{x_i}))=0$. □

2.2 可测集与测度

思考题 1. $E\subset[0,1]$. 若 $m(E)=1$, 试证明 $\bar{E}=[0,1]$; 若 $m(E)=0$, 试证明 $\mathring{E}=\varnothing$.

证明. 首先 $E\subset[0,1]\implies\bar{E}\subset[0,1]\implies 1=m(E)=m(\bar{E})\leqslant 1\implies m(\bar{E})=1$. 下面反证 $\bar{E}=[0,1]$. 事实上 $\bar{E}\neq[0,1]\implies\bar{E}\subsetneq[0,1]\implies\exists x\in[0,1],x\notin\bar{E}$. 所以 $x\in[0,1]\cap\bar{E}^c$. 而 $\bar{E}^c$ 是开集, 故 $\exists\delta\in(0,1),B(x,\delta)\subset\bar{E}^c$.
若 $x\in(0,1)$, 则令 $\delta'=\min\{x,1-x,\delta\}>0$, 于是 $B(x,\delta')\subset[0,1]\cap\bar{E}^c\implies 2\delta'\leqslant m([0,1]\cap\bar{E}^c)$. 由 Carathéodory 条件, $m([0,1]\cap\bar{E}^c)=1-m(\bar{E})=0$, 即 $2\delta'\leqslant 0$, 矛盾.
若 $x=0$, 则 $[0,\delta)\subset\bar{E}^c\implies\delta\leqslant m(\bar{E}^c)$, 仍由 Carathéodory 条件得到矛盾. 当 $x=1$ 时同理.
类似可证后一问. 若 $\mathring{E}\neq\varnothing$, 则 $\exists x\in\mathring{E}\implies\exists\delta>0$, s.t. $B(x,\delta)\subset E$, 于是有 $2\delta\leqslant m(E)=0$, 矛盾. □

思考题 2. 设 $\{A_n\}$ 是互不相交的可测集列,$B_n \subset A_n(n=1,2,\cdots)$, 试证明

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n)$$

证明. 先用数学归纳法证明

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)=\sum_{k=1}^{n} m^*(B_k).$$

由 $B_1\subset A_1, B_2\subset A_2, A_1\cap A_2=\varnothing$ 及 Carathéodory 条件得 $m(B_1\cup B_2)=m((B_1\cup B_2)\cap A_1)+m((B_1\cup B_2)\cap A_1^c)=m(B_1)+m(B_2)$, 故 $n=2$ 时结论成立. 若 $n=m$ 时结论成立, 则

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} B_i\right) &= m^*\left(\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} B_i\right)\cap A_{m+1}\right)+m^*\left(\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} B_i\right)\cap A_{m+1}^c\right) \\ &= m^*(B_{m+1})+m^*\left(\bigcup_{i=1}^{m} B_i\right)=m^*(B_{m+1})+\sum_{i=1}^{m} m^*(B_i)=\sum_{i=1}^{m+1} m^*(B_i). \end{aligned}$$

所以

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\geqslant m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right)=\sum_{i=1}^{k} m^*(B_i), \forall k\geqslant 1.$$

令 $k\to\infty$, 由次可数可加性得

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\geqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*(B_i)\geqslant m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right).$$

于是命题得证. □

-思考题 3-. 设有点集 E_1, E_2, 且 E_1 是可测集. 若 $m(E_1\triangle E_2)=0$, 试证明 E_2 是可测集, 且

$$m(E_2)=m(E_1).$$

证明. 由题 $m(E_1\backslash E_2)=m(E_2\backslash E_1)=0$. 由 $E_1=[E_2\backslash(E_2\backslash E_1)]\cup(E_1\backslash E_2)$ 立得结论. □

思考题 4. 设点集 B 满足: 对于任给 $\varepsilon>0$, 都存在可测集 A, 使得 $m^*(A\triangle B)<\varepsilon$, 试证明 B 是可测集.

证明. 证法 1. 因为 A 可测, 由定理 2.13, 存在开集 $G_1\supset A, m^*(G_1\backslash A)<\varepsilon$(事实上这是可测集的等价条件, Stein 将其作为 Lebesgue 可测集的定义), 此时

$$B\triangle G_1\subset(B\triangle A)\cup(A\triangle G_1)=(A\triangle B)\cup(G_1\backslash A),$$

故 $m^*(B\triangle G_1)\leqslant m^*(A\triangle B)+m^*(G_1\backslash A)<2\varepsilon$. 同时由外测度的定义, 存在开集 $G_2\supset B\triangle G_1$

使得 $m^*(G_2) \leqslant m^*(B\triangle G_1)+\varepsilon < 3\varepsilon$. 令 $G = G_1 \cup G_2$, 则 G 是开集, 并且有

$$G = G_1 \cup G_2 \supset G_1 \cup (B\triangle G_1) \supset G_1 \cup (B\backslash G_1) = G_1 \cup B \supset B,$$
$$G\backslash B = (G_1 \cup G_2)\backslash B = (G_1\backslash B) \cup (G_2\backslash B) \subset (B\triangle G_1) \cup G_2 \subset G_2.$$

故 $m^*(G\backslash B) \leqslant m^*(G_2) < 3\varepsilon$, 这说明 B 是可测集.
证法 2. 由题,$\forall \varepsilon > 0, \forall i, \exists A_i \in \mathscr{M}$, s.t. $m(A_i\triangle B) < \dfrac{\varepsilon}{2^i} \implies m^*(A_i\backslash B) < \dfrac{\varepsilon}{2^i}, m^*(B\backslash A_i) < \dfrac{\varepsilon}{2^i}$.
于是

$$m^*\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\backslash B\right) \leqslant m^*(A_i\backslash B) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^i}, \forall i \geqslant 1,$$
$$m^*\left(B\backslash \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(B\backslash A_j)\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m^*(B\backslash A_j) < \varepsilon.$$

第二个等式利用了外测度的次可数可加性. 所以 $m^*\left(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j\backslash B\right) = 0, m^*\left(B\backslash \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j\right) < \varepsilon$. 令 $C_\varepsilon = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j$, 则我们证明了 $\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon \in \mathscr{M}$, s.t. $m^*(C_\varepsilon\backslash B) = 0, m^*(B\backslash C_\varepsilon) < \varepsilon$.
下面取 $\varepsilon = 1/k$, 则

$$\exists C_k \in \mathscr{M}, \text{s.t. } m^*(C_k\backslash B) = 0, m^*(B\backslash C_\varepsilon) < \frac{1}{k}$$
$$\implies \begin{cases} m^*\left(\bigcup\limits_{l=1}^{\infty} C_l\backslash B\right) \leqslant \sum\limits_{l=1}^{\infty} m^*(C_l\backslash B) = 0(\text{次可数可加性}) \\ m^*\left(B\backslash \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} C_l\right) = m^*\left(\bigcap\limits_{l=1}^{\infty}(B\backslash C_l)\right) \leqslant m^*(B\backslash C_k) < \dfrac{1}{k}, \forall k \geqslant 1 \end{cases}$$
$$\implies m^*\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} C_l\backslash B\right) = 0 = m^*\left(B\backslash \bigcup_{l=1}^{\infty} C_l\right) \implies \bigcup_{l=1}^{\infty} C_l\backslash B \in \mathscr{M}, B\backslash \bigcup_{l=1}^{\infty} C_l \in \mathscr{M}$$
$$\implies \bigcup_{l=1}^{\infty} C_l \cap B = \bigcup_{l=1}^{\infty} C_l\backslash \left(\bigcup_{l=1}^{\infty} C_l\backslash B\right) \in \mathscr{M} \implies B = \left(\bigcup_{l=1}^{\infty} C_l \cap B\right) \cup \left(B\backslash \bigcup_{l=1}^{\infty} C_l\right) \in \mathscr{M}.$$

故命题得证. □

注: 下面的条件是等价的:
(1)$E \subset \mathbb{R}^n$ 是可测集;
(2) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G \supset E, m^*(G\backslash E) < \varepsilon$;
(3) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset E, m^*(E\backslash F) < \varepsilon$;
(4) 存在 G_δ 集 $H \supset E, m(H\backslash E) = 0$;
(5) 存在 F_σ 集 $K \subset E, m(E\backslash K) = 0$.

思考题 6. 设 $X = \{E_\alpha\}$ 是由 $\mathbb{R}$ 中某些互不相交的正测集形成的集族, 试证明 X 是可数的.

证明. 设 $X_{k,i}=\{E_\alpha\in X: m(E_\alpha\cap[-k,k])\geqslant\frac{1}{i}\}$, 则 $\bigcup\limits_{k,i=1}^{\infty}X_{k,i}=X$. 事实上, 一方面显然 $\bigcup\limits_{k,i=1}^{\infty}X_{k,i}\subset X$ 成立. 另一方面, 由 $E_\alpha\in X$ 知 $m(E_\alpha)>0$, 于是 $m\left(\lim\limits_{k\to\infty}(E_\alpha\cap[-k,k])\right)>0$. 利用极限的保号性知 $\exists k$, s.t. $m\left(E_\alpha\cap[-k,k]\right)>0$, 于是 $\exists k,i_0$, s.t. $m\left(E_\alpha\cap[-k,k]\right)\geqslant\frac{1}{i_0}$, 即 $E_\alpha\in X_{k,i_0}$.

下面我们用反证法证明每个 $X_{k,i}$ 有限. 设某个 $X_{k,i}$ 是无限集, 则其必有一个可数子集 $\{E_{\alpha_j}\}_{j=1}^{\infty}$, 由它们互不相交可知

$$+\infty=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{i}\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}m(E_{\alpha_j})\xlongequal{\text{可数可加}}m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_{\alpha_j}\right)\leqslant m([-k,k])\leqslant 2k.$$

产生矛盾. 由前可知, X 作为可数个有限集的并, 应是可数的. □

-思考题 7-. 设有 $\mathbb{R}$ 中的可测集列 $\{E_k\}$, 且当 $k\geqslant k_0$ 时,$E_k\subset[a,b]$. 若存在 $\lim\limits_{k\to\infty}E_k=E$, 试证明

$$m(E)=\lim_{k\to\infty}m(E_k).$$

证明. 因为 $m\left(\bigcup\limits_{k=k_0}^{\infty}E_k\right)\leqslant m([a,b])<\infty$, 故由测度论中的 Fatou 引理 (书 78 页),

$$\begin{aligned}m(E)=m\left(\lim_{k\to\infty}E_k\right)&=m\left(\varliminf_{k\to\infty}E_k\right)\leqslant\varliminf_{k\to\infty}m(E_k)\\&\leqslant\varlimsup_{k\to\infty}m(E_k)\leqslant m\left(\varlimsup_{k\to\infty}E_k\right)=m\left(\lim_{k\to\infty}E_k\right)=m(E).\end{aligned}$$

所以 $m(E)=\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)$. □

2.3 可测集与 Borel 集的关系

思考题 1. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 且 $m^*(E)<+\infty$. 若有 $m^*(E)=\sup\{m(F):F\subset E\text{是有界闭集}\}$, 试证明 E 是可测集.

证明. $\forall i\in\mathbb{Z}_+$, 存在有界闭集 $F_i\subset E, m(F_i)>m^*(E)-1/i$. 因此 $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}F_j\subset E, m\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}F_j\right)\geqslant m(F_i)>m^*(E)-1/i, \forall i\in\mathbb{Z}_+$. 令 $i\to\infty$ 得 $m^*(E)\geqslant m\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}F_j\right)\geqslant m^*(E)\implies m\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}F_j\right)=m^*(E)$. 所以由 Carathéodory 条件有 $m^*\left(E\backslash\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}F_j\right)=0$, 这说明 $E\backslash\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}F_j\in\mathscr{M}$, 于是可得 $E=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}F_j\cup\left(E\backslash\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}F_j\right)\in\mathscr{M}$. □

-思考题 2-. (p.s. 对比习题 2 之 3.) 设 $A \in \mathscr{M}, B \subset \mathbb{R}^n$, 试证明

$$m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) = m^*(A) + m^*(B).$$

证明. 若 $m(A) = +\infty$, 则上式两侧均为 $+\infty$; 不然, 由 Carathéodory 条件, 有 $m^*(A \cup B) = m^*((A \cup B) \cap A) + m^*((A \cup B) \cap A^c) = m(A) + m^*(B \backslash A), m^*(B) = m^*(B \cup A) + m^*(B \cap A^c) = m^*(A \cup B) + m^*(B \backslash A)$. 由前面两式可得结论. □

-思考题 3-. 设 $f(x), g(x)$ 是 $[a, b]$ 上严格递减的连续函数, 且对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$m(\{x \in [a, b] : f(x) > t\}) = m(\{x \in [a, b] : g(x) > t\}),$$

试证明 $f(x) = g(x), x \in (a, b)$.

证明. 证法 1. 反证, 设 $f(x_0) \neq g(x_0), x_0 \in (a, b)$, 不妨设 $f(x_0) > g(x_0)$, 记 $\varepsilon = f(x_0) - g(x_0)$. 由单调性和连续性易得 $\exists x_1 \in (x_0, b)$, s.t. $f(x_1) > f(x_0) - \varepsilon/2 = g(x_0) + \varepsilon/2$. 现在取 $t = f(x_1)$, 则 $m(\{x \in [a, b] : f(x) > t\}) = [a, x_1)$, 然而因为 $g(x_0) < t$, 故 $m(\{x \in [a, b] : g(x) > t\}) \subsetneq [a, x_0] \subsetneq [a, x_1)$, 与题中等式矛盾, 故 $f = g, \forall x \in (a, b)$.
证法 2. 对任意 $t \in [f(b), f(a)]$, 由 f 严格递减及连续函数介值定理知 $f^{-1}(t)$ 是一个单点, 而 $m(\{x \in [a, b] : f(x) > t\}) = m(\{x \in [a, b] : x < f^{-1}(t)\}) = f^{-1}(t) - a$, 同理 $m(\{x \in [a, b] : f(x) > t\}) = g^{-1}(t) - a$. 所以 $f^{-1}(t) = g^{-1}(t), \forall t \in [f(b), f(a)] \implies f^{-1} = g^{-1} \implies f = (f^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1} = g, x \in (a, b)$. □

2.4 正测度集与矩体的关系

思考题 1. 设 $E \subset \mathbb{R}$, 且 $m(E) > 0$, 试证明存在 $a > 0$, 使得

$$(E + \{x\}) \cap E \neq \varnothing \, (|x| < a).$$

证明. 由 Steinhaus 定理, $\exists a > 0, B(0, a) \subset E - E$. 所以 $\forall x, |x| < a, \exists y, z \in E, x = y - z \implies z + x = y$. 而 $z + x \in E + \{x\}, y \in E$, 故 $(E + \{x\}) \cap E \neq \varnothing$. □

-思考题 2-. 设 $E \subset \mathbb{R}$ 是可测集, $a \in \mathbb{R}, \delta > 0$. 若对满足 $|x| < \delta$ 的一切 x, 均有 $a + x \in E$ 或 $a - x \in E$, 试证明 $m(E) \geqslant \delta$.

证明. 对满足 $|x| < \delta$ 的一切 x, 有 $x \in E - \{a\}$ 或 $x \in \{a\} - E$, 于是 $(-\delta, \delta) \subset (E - \{a\}) \cup (\{a\} - E)$, 故有 $2\delta \leqslant m(E - \{a\}) + m(\{a\} - E) = 2m(E) \implies m(E) \geqslant \delta$, 其中用到了测度的次可数可加性和平移不变性. □

2.5 不可测集

-思考题 1-. 试问: 是否存在可测集 $E \subset [0, 1]$, 使得对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, 存在 $y \in E$, 有 $x - y \in \mathbb{Q}$?

证明. 书 87 页已经指出任一正测度集 E 都有不可测子集, 下面给出证明. 事实上, 由 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E \cap [-n,n])$ 知不妨设 E 有界, 而 $\exists n_0, E \subset [-n_0, n_0]$. 考虑 E 上的等价关系: 对 $x, y \in E, x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$, 令等价类 $[x] = \{y \in E : y \sim x\}$, 商集 $E/\sim = \{[x] : x \in E\}$, 则 $\bigcup_{x \in E}[x] = E$. 由选择公理, 在 $E/\sim$ 的每个等价类中只取一个点构成集合 W, 则 $W \subset E$, 下面用反证法证明 W 是不可测集. 由 $E - E \subset [-2n_0, 2n_0]$ 知, 若设 $\mathbb{Q} \cap [-2n_0, 2n_0] = \{r_n\}$, 对任意 $k \neq l, (W + \{r_k\}) \cap (W + \{r_l\}) = \varnothing$, 并且

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(W + \{r_n\}) \subset [-3n_0, 3n_0], E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(W + \{r_n\}).$$

由 W 是可测集知 $W + \{r_n\}$ 均可测, 且

$$0 < m(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(W + \{r_n\}) = \begin{cases} m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(W + \{r_n\})\right) \leqslant m([-3n_0, 3n_0]) = 6n_0; \\ \sum_{n=1}^{\infty} m(W). \end{cases}$$

若 $m(W) > 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} m(W) \leqslant 6n_0$ 矛盾; 若 $m(W) = 0$, 则 $0 < m(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(W) = 0$, 又是矛盾. 故 W 不可测. 于是我们取 $E \subset [0,1]$ 的不可测子集 W, 对任意 $x \in \mathbb{R}, x - [x] \in [0,1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(W + \{r_n\})$(这里 $[x]$ 表示 Gauss 取整). 因此存在 $y \in W, r_n \in \mathbb{Q}, x - [x] = y + r_n$, 即 $x - y = [x] + r_n \in \mathbb{Q}$. □

-思考题 2-. 试做出互不相交的点集列 $\{E_k\}$, 使得

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) < \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k).$$

证明. 取 $(0,1)$ 中的不可测集 W, 并设 $\mathbb{Q} \cap (0,1) = \{r_n\}, E_n = W + \{r_n\}$, 由测度的平移不变性,

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leqslant m(0,2) = 2, \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(W) = +\infty,$$

最后一个等号是因为 $m^*(W) > 0$(否则 $W \in \mathscr{M}$). □

-思考题 3-. 试在 $[0,1]$ 中作一不可数集 W, 使得 $W - W$ 无内点.

证明. 仿照教材方法作 $[0,1]$ 上的不可测集 W, 易得 W 是不可数集 (否则 W 是零测集, 从而可测). 若 $x, y \in W$, 则 $x = y$ 或 $x - y \notin \mathbb{Q}$, 即 $x - y = 0 \in W - W$ 或 $x - y \notin \mathbb{Q}$. 因此 $W - W \subset \mathbb{Q}^c \cup \{0\}$, 进而 W 无内点 (否则 $W - W$ 包含区间, 从而包含有理数, 矛盾). □

思考题 4. 设 W 是不可测集,E 是可测集, 试证明 $E \triangle W$ 是不可测集.

证明. 反证. 若 $E\triangle W\in\mathscr{M}$, 则 $E\cup W=E\cup(E\triangle W)\in\mathscr{M}$. 于是 $E\cap W=(E\cup W)\backslash(E\triangle W)\in\mathscr{M}$, 且 $W\backslash E=(E\cup W)\backslash E\in\mathscr{M}$. 于是我们得到 $W=(E\cap W)\cup(W\backslash E)\in\mathscr{M}$, 矛盾. □

思考题 5. 设有点集 E. 若对任意的满足

$$F\subset E\subset G$$

的闭集 F 和开集 G, 有

$$\sup_F\{m(F)\}<\inf_G\{m(G)\},$$

试证明 E 不可测.

证明. 反证. 若 E 可测, 则由定理 2.13, 存在开集 $G\supset E, m(G\backslash E)=m(G)-m(E)<\varepsilon$; 存在闭集 $F\subset E, m(E\backslash F)=m(E)-m(F)<\varepsilon$. 由确界的定义, 易知 $\sup\limits_F\{m(F)\}=m(E)=\inf\limits_G\{m(G)\}$. 矛盾. □

-思考题 6-. 试问: 一族可测集的交集必是可测集吗?

解. 不一定. 反证法, 取不可测集 W, 则 $\forall x\in W, \{x\}^c\in\mathscr{M}$, 因此 $\bigcap\limits_{x\in W}\{x\}^c\in\mathscr{M}$. 故由 De Morgan 法则, 我们有 $\bigcup\limits_{x\in W}\{x\}=W\in\mathscr{M}$, 矛盾. □

2.6 连续变换与可测集

本节没有习题.

习题 2

1. 设 $E\subset\mathbb{R}$, 且存在 $q:0<q<1$, 使得对任一区间 (a,b), 都有开区间列 $\{I_n\}$:

$$E\cap(a,b)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n, \sum_{n=1}^{\infty}m(I_k)<(b-a)q,$$

试证明 $m(E)=0$.

证明. 反证. 假设 $m^*(E)>0$, 由 $m^*(E)=\inf\{m(G):G\supset E, G\text{为开集}\}$ 及下确界性质, 对 $\varepsilon=\dfrac{1-q}{2q}m^*(E)>0$, 存在开集 $G\supset E$, 使得 $m(G)<m^*(E)+\varepsilon=\dfrac{1+q}{2q}m^*(E)$. 设 $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k=1}^{\infty}$ 为 G 的构成区间, 即 $G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k)$, 由题意, 对每个 (α_k,β_k), 存在开区间列 $\{I_i^k\}_{i=1}^{\infty}$, 使得

$E\cap(\alpha_k,\beta_k)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i^k,\sum_{i=1}^{\infty}m(I_i^k)<(\beta_k-\alpha_k)q$, 于是

$$\begin{aligned}m^*(E)=m^*(E\cap G)&=m^*\left(E\cap\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k)\right)\right)=m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E\cap(\alpha_k,\beta_k))\right)\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*\left(E\cap(\alpha_k,\beta_k)\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i^k\right)\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}m(I_i^k)<\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)q\\&=qm(G)<q\cdot\frac{1+q}{2q}m^*(E)=\frac{1+q}{2}m^*(E)<m^*(E)(0<q<1),\end{aligned}$$

即 $m^*(E)<m^*(E)$, 这是不可能的, 故 $m(E)=0$. □

2. 设 $A_1,A_2\subset\mathbb{R}^n,A_1\subset A_2,A_1$ 是可测集, 且 $m\left(A_1\right)=m^*\left(A_2\right)<+\infty$, 试证明 A_2 是可测集.

证明. 因为 A_1 可测,$m^*(A_1)=m(A_1)=m^*(A_2)$, 所以 $m^*(A_2)=m^*(A_2\cap A_1)+m^*(A_2\cap A_1^c)=m^*(A_1)+m^*(A_2\cap A_1^c)=m^*(A_2)+m^*(A_2\cap A_1^c)$, 又 $m^*(A_2)<\infty$, 故 $m^*(A_2\cap A_1^c)=0\implies A_2\backslash A_1$ 可测, 且 $A_2=A_1\bigcup(A_2\backslash A_1)$, 故 A_2 可测. □

-3-. (p.s. 对比 2.3 思考题 2) 设 $A,B\subset\mathbb{R}^n$ 都是可测集, 试证明

$$m^*(A\cup B)+m^*(A\cap B)=m^*(A)+m^*(B)$$

(用 $A,A\cup B$ 做试验集).

证明. 因为 A,B 都是可测集, 所以 $m^*(A\cup B)+m^*(A\cap B)=m^*(A\cup(B\backslash A))+m^*(A\cap B)=m^*(A)+m^*(B\backslash A)+m^*(A\cap B)=m^*(A)+m^*(B\cap A^c)+m^*(B\cap A)=m^*(A)+m^*(B)$. □

-4-. 试问: 是否存在闭集 $F,F\subset[a,b]$ 且 $F\neq[a,b]$, 而

$$m(F)=b-a?$$

证明. 假设存在这样的 F, 则 $\exists x_0\in[a,b],x_0\notin F$. 因此 $\exists x_0\in[a,b],\exists\delta\in(0,b-a),B(x_0,\delta)\subset F^c$, 故而 $[a,b]\cap B(x_0,\delta)\subset[a,b]\backslash F$. 所以 $0<m([a,b]\backslash F)=m([a,b])-m(F)=b-a-m(F)=0$, 矛盾. □

-5-. 试在 $\mathbb{R}$ 中作由某些无理数构成的闭集 F, 使得 $m(F)>0$.

证明. 记 $\mathbb{R}$ 中全体有理数为 $\{r_n\}$, 令 $E_n=\left(r_n-\frac{1}{2^{n+1}},r_n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$, 则 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 是开集, 且

$$m(E)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$$

令 $F=\mathbb{R}\backslash E$, 则 F 是闭集, 且 $m(F)=\infty>0$, 故即为所求. □

7. 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集列, 若 $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) < +\infty$, 试证明

$$m\left(\varlimsup_{k\to\infty} E_k\right) \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} m(E_k).$$

证明. 因为 $\varlimsup_{k\to\infty} E_k = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$, 而 $\left\{\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\right\}$ 为递减的可测集列, 且 $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) < \infty$, 由测度的下连续可得:

$$m\left(\varlimsup_{k\to\infty} E_k\right) = m\left(\lim_{k\to\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\right) = \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\right) = \varlimsup_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\right) \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} m\left(E_k\right).$$

□

8. 设 $\{E_k\}$ 是 $[0,1]$ 中的可测集列, $m(E_k) = 1 (k = 1, 2, \cdots)$, 试证明

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1$$

证明. 记 $E = [0,1]$, 因为 $m(E_k) = 1(k = 1, 2, \cdots)$, 所以 $m(E\backslash E_k) = m(E) - m(E_k) = 0(k = 1, 2, \cdots)$, 所以 $1 = m(E) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) + m\left(E\backslash\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) + m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E\backslash E_k)\right) \leqslant m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) + \sum_{k=1}^{\infty} m\left(E\backslash E_k\right) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right)$, 即$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) \geqslant 1$, 又 $\because m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leqslant m(E) = 1 \implies m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1$. □

-9-. 设 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 是 $[0,1]$ 中的可测集, 且有

$$\sum_{i=1}^{k} m(E_i) > k - 1,$$

试证明 $m\left(\bigcap_{i=1}^{k} E_i\right) > 0$.

证明. 由 Carathéodory 条件及次可数可加性知

$$\begin{aligned}1 &> \sum_{i=1}^{k}(1 - m(E_i)) = \sum_{i=1}^{k}(m[0,1] - m(E_i)) = \sum_{i=1}^{k} m(E_i^c)\\ &\geqslant m\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i^c\right) = m\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} E_i\right)^c\right) = 1 - m\left(\bigcap_{i=1}^{k} E_i\right).\end{aligned}$$

□

-10-. 设 A,B,C 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集. 若有

$$m(A\triangle B)=0, m(B\triangle C)=0,$$

试证明 $m(A\triangle C)=0.(A\backslash C=A\cap C^c\cap(B\cup B^c)=[A\cap(B\backslash C)]\cup[C^c\cap(A\backslash B)])$

证明. 由题 $m(A\backslash B)=m(B\backslash A)=m(B\backslash C)=m(C\backslash B)=0$. 按提示我们有 $m(A\backslash C)\leqslant m(A\cap(B\backslash C))+m(C^c\cap(A\backslash B))\leqslant m(B\backslash C)+m(A\backslash B)=0$. 同理 $m(C\backslash A)=0$, 故命题得证. □

12. 设 $\{B_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中递减可测集列, $m^*(A)<+\infty$. 令 $E_k=A\cap B_k(k=1,2,\cdots)$, $E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$, 试证明

$$\lim_{k\to\infty}m^*(E_k)=m^*(E).$$

证明. 取 A 的等测包 H, 则 $H\supset A, m(H)=m^*(A)<\infty$. 因为 $\{B_k\}$ 为递减可测集列, 所以 $\{H\bigcap B_k\}$ 为递减可测集列, 由测度的下连续性可知 $\lim_{k\to\infty}m(H\cap B_k)=m\left(\lim_{k\to\infty}H\cap B_k\right)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}(H\cap B_k)\right)$. 此外由外测度的单调性和次可加性知

$$\begin{aligned}
0\leqslant m^*(E_k)-m^*(E)&\leqslant m^*(E_k\backslash E)\\
&=m^*\left((A\cap B_k)\backslash\left(A\cap\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k\right)\right)\right)\\
&=m^*\left(A\cap\left(B_k\backslash\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k\right)\right)\right)\leqslant m^*\left(H\cap\left(B_k\backslash\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k\right)\right)\right)\\
&=m\left((H\cap B_k)\backslash\left(\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}(H\cap B_k)\right)\right)\right)\\
&=m(H\cap B_k)-m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}(H\cap B_k)\right).
\end{aligned}$$

令 $k\to\infty$ 可得 $\lim_{k\to\infty}m^*(E_k)=m^*(E)$. □

-13-. 设 $E\subset\mathbb{R}^n, H\supset E$ 且 H 是可测集. 若 $H\backslash E$ 的任一可测子集皆为零测集, 试问: H 是 E 的等测包吗?

证明. 令 G 是 E 的一个等测包, 则 $G\supset E, m(G)=m^*(E)$, 因而 $H\backslash G\subset H\backslash E$. 由于 $H\backslash G$ 是可测集, 根据已知条件, $m(H\backslash G)=0$, 所以 $m(H)=m(H\backslash G)+m(H\cap G)=m(H\cap G)\leqslant m(G)=m^*(E)$. 又因为 $H\supset E$, 所以 $m(H)\geqslant m^*(E)$, 故 $m(H)=m^*(E)$, 即 H 是 E 的等测包. □

14. 试证明点集 E 可测的充分必要条件是: 对任给 $\varepsilon>0$, 存在开集 $G_1,G_2:G_1\supset E, G_2\supset E^c$, 使得 $m(G_1\cap G_2)<\varepsilon$.

证明. *必要性*. 若 E 可测, 由定理 2.13, $\forall\varepsilon>0, \exists$ 开集 $G\supset E$, 闭集 $F\subset E$, s.t. $m(G\backslash E)<\varepsilon/2, m(E\backslash F)<\varepsilon/2$, 由 $G\backslash F\subset(G\backslash E)\cup(E\backslash F)$, 知 $m(G\backslash F)\leqslant m((G\backslash E)\cup(E\backslash F))\leqslant m(G\backslash E)+m(E\backslash F)<\varepsilon$, 令 $G_1=G, G_2=F^c$, 则 G_1,G_2 为开集,$G_1\supset E, G_2\supset E^c, m(G_1\cap G_2)=$

$m(G\backslash F) < \varepsilon$.

充分性. 若对 $\forall\varepsilon > 0$, 存在开集 $G_1, G_2 : G_1 \supset E, G_2 \supset E^c$, s.t. $m(G_1 \cap G_2) < \varepsilon$, 则取 $\varepsilon_n = 1/n$, 存在开集 G_n, 闭集 $F_n, G_n \supset E, F_n \subset E$, 使 $m(G_n\backslash F_n) < \varepsilon_n, n = 1, 2, \cdots$. 令 $G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n, F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, 则 $G \supset E, F \subset E$ 均为可测集, 且 $m(G\backslash F) \leqslant m(G_n\backslash F_n) < \varepsilon_n$, 令 $n \to \infty$, 得 $m(G\backslash F) = 0$. 因为 $F \subset E$, 所以 $G\backslash E \subset G\backslash F, m^*(G\backslash E) \leqslant m(G\backslash F) = 0$, 即 $G\backslash E$ 为零测集, 故 $E = G\backslash(G\backslash E)$ 为可测集. □

-15-. 设 $E \subset [0, 1]$ 是可测集, 且有

$$m(E) \geqslant \varepsilon > 0, x_i \in [0, 1], i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中 $n > \dfrac{2}{\varepsilon}$. 试证明 E 中存在两个点其距离等于 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 中某两个点之间的距离.

证明. 因为 $x_i \in [0, 1]$, 所以 $E + \{x_i\} \subset [0, 2], i = 1, 2, \cdots, n$, 所以 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(E + \{x_i\}) \subset [0, 2] \implies m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}(E + \{x_i\})\right) \leqslant m([0, 2]) = 2$. 由测度的平移不变性知 $m(E + \{x_i\}) = m(E) \geqslant \varepsilon > 0, i = 1, 2, \cdots, n$. 若 $(E + \{x_i\}) \cap (E + \{x_j\}) = \varnothing, \forall i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n$, 则 $m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}(E + \{x_i\})\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} m(E + \{x_i\}) = n \cdot m(E) \leqslant 2 \implies n \leqslant 2/m(E) \leqslant 2/\varepsilon$, 与已知 $n > 2/\varepsilon$ 矛盾, 所以存在 $i \neq j, (E + \{x_i\}) \cap (E + \{x_j\}) \neq \varnothing$, 即存在 $e_i, e_j \in E, e_i \neq e_j$, s.t. $e_i + x_i = e_j + x_j$, 则 $|e_i - e_j| = |x_i - x_j|$, 原命题得证. □

16. 设 W 是 $[0, 1]$ 中的不可测集, 试证明存在 $\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1$, 使得对于 $[0, 1]$ 中任一满足 $m(E) \geqslant \varepsilon$ 的可测集 $E, W \cap E$ 是不可测集.

证明. 反证, 假设 $\forall\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1$, 存在可测集 $E \subset [0, 1], m(E) \geqslant \varepsilon$, s.t. $W \cap E$ 是可测集. 令 $\varepsilon_n = 1 - 1/n$, 存在可测集 $E_n \subset [0, 1]$, s.t. $m(E_n) \geqslant \varepsilon_n, W \cap E_n$ 为可测集,$n = 1, 2, \cdots$. 令 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, 则 $E \subset [0, 1]$ 为可测集, 且 $1 - 1/n \leqslant m(E_n) \leqslant m(E) \leqslant 1$, 令 $n \to \infty$ 知 $m(E) = 1, m([0, 1]\backslash E) = 0, m(W \cap ([0, 1]\backslash E)) = 0$. 所以 $W \cap ([0, 1]\backslash E)$ 为零测集. 又因为 $W \cap E = W \cap \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(W \cap E_n)$ 是可测集, 所以 $W = W \cap [0, 1] = W \cap (E \cup ([0, 1]\backslash E)) = (W \cap E) \cup (W \cap ([0, 1]\backslash E))$ 是可测集. 矛盾. □

3 可测函数

注: 本章及以后都将 $\{x \in E : P\}$ 简记为 $E[P]$, 其中 P 是关于 f 的不等式或等式.

3.1 可测函数的定义及其性质

-思考题 1-. 设 $f(x)$ 定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上. 若 $f^2(x)$ 在 E 上可测, 且 $\{x \in E : f(x) > 0\}$ 是可测集, 则 $f(x)$ 在 E 上可测.

证明. 由 $E[|f| > c] = \begin{cases} E[f^2 > c^2], & c \geqslant 0 \\ E, & c < 0 \end{cases} \in \mathscr{M}$ 可知 $|f(x)|$ 在 E 上可测. 又因为 $f(x) = |f(x)|[\chi_{E[f>0]}(x) - \chi_{E[f<0]}(x)]$, 故 f 在 E 上可测. □

思考题 2. 记 $\mathscr{F}$ 为 $(0,1)$ 上的一个连续函数族, 则函数

$$g(x) = \sup_{f \in \mathscr{F}} \{f(x)\}, h(x) = \inf_{f \in \mathscr{F}} \{f(x)\}$$

是 $(0,1)$ 上的可测函数.

证明. 设 $E = [0,1]$. 因为 $g(x) > c \iff \sup\limits_{f \in \mathscr{F}} \{f(x)\} > c \iff \exists f_c \in \mathscr{F}, f_c(x) > c$, 所以 $E[g > c] = \bigcup\limits_{f \in \mathscr{F}} E[f > c]$. 由 f 连续知 $E[f > c]$ 是开集, 进而 $E[g > c]$ 是开集, 所以是可测集, 于是 g 可测. 同理由 $E[h < c] = \bigcup\limits_{f \in \mathscr{F}} E[f < c]$ 知 h 可测. □

思考题 3. 若 $\{f_k(x)\}$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数列, 则 $f_k(x)$ 在 E 上收敛的点集是可测集.

证明. 设 C 是 f_k 在 E 上收敛的点集, 由 Cauchy 收敛准则知

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} \bigcap_{l=N}^{\infty} E\left[|f_k - f_l| < \frac{1}{i}\right].$$

所以 $C \in \mathscr{M}$. □

思考题 4. 设 $f(x)$ 在 $E \subset \mathbb{R}$ 上可测,G 和 F 各为 $\mathbb{R}$ 中的开集和闭集, 则点集

$$E_1 = \{x \in E : f(x) \in G\}, E_2 = \{x \in E : f(x) \in F\}$$

是可测集.

证明. 由 $\mathbb{R}$ 中开集的构造知 $G = \bigcup\limits_{i=1}^{M} (a_i, b_i)$, 其中 $M = m \in \mathbb{N}^+$ 或 ∞,$\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{M}$ 互不相交. 于是 $E_1 = E[f \in G] = \bigcup\limits_{i=1}^{M} E[f \in (a_i, b_i)] = \bigcup\limits_{i=1}^{M} (E[f > a_i] \cap E[f < b_i]) \in \mathscr{M}$. 进而 $E_2 = E[f \in F] = E \backslash E[f \in F^c] \in \mathscr{M}$. □

思考题 5. 设 $\{E_k\} \subset \mathbb{R}^n$ 是互不相交的可测集列. 若 $f(x)$ 在 $E_k(k=1,2,\cdots)$ 上是可测的, 则 $f(x)$ 在 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 上也是可测的.

证明. 设 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, 则 $E[f>c]=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k[f>c] \in \mathscr{M}$, 故 f 在 E 上可测. □

-思考题 6-. $f \in C([a,b])$. 若有定义在 $[a,b]$ 上的函数 $g(x): g(x)=f(x)$, a.e. $x \in [a,b]$, 试问: $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上必是几乎处处连续的吗?

证明. 不是. 例如,$f(x):=0, g(x):=D(x)=\begin{cases}1, & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [a,b] \backslash \mathbb{Q}.\end{cases}$
因为当且仅当 $x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}, f(x) \neq g(x)$, 故 $f=g$, a.e. $x \in [a,b]$. 但 f 连续, g 无处连续. □

-思考题 7-. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上几乎处处连续的函数, 试问是否存在 $g \in C(\mathbb{R})$, 使得

$$g(x)=f(x), \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}?$$

证明. 不一定存在. 例如 $f(x):=\chi_{(0,+\infty)}(x)$, 下面用反证法证明符合题意的 $g(x)$ 不存在.
设 $\exists g \in C(\mathbb{R})$, s.t. $g(x)=f(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}$, 则令 $Z=\{x \in \mathbb{R}: f(x) \neq g(x)\}$, 则 $m(Z)=0$. 于是对任意 $x \neq 0, \forall i>1/|x|, B(x,1/i) \not\subset Z$(否则 $m(Z) \geqslant 2/i>0$). 所以 $\exists x_i \in B(x,1/i), x_i \notin Z$, 于是 $f(x_i)=\begin{cases}1, & x>0(x_i>x-1/i>0), \\ 0, & x<0(x_i<x+1/i<0).\end{cases}$ 因为 $x_i \notin Z$, 所以 $g(x_i)=f(x_i)$, 进而 $g(x)=\lim_{i \to \infty} g(x_i)=\lim_{i \to \infty} f(x_i)=\begin{cases}1, & x>0, \\ 0, & x<0\end{cases}$, 这与 $g \in C(\mathbb{R})$ 矛盾. □

3.2 可测函数列的收敛

(二) 几乎处处收敛与依测度收敛

-思考题 1-. 设在可测集 $E \subset \mathbb{R}$ 上,$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$, 且依测度收敛于 $g(x)$, 试问: 是否有关系式

$$g(x)=f(x), \text{ a.e. } x \in E?$$

证明. 由 Riesz 定理, $\exists\{n_k\}$, 有 $\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x)=g(x)$, a.e. $x \in E$. 所以 $g(x)=f(x)$, a.e. $x \in E$. □

-思考题 2-. 设 $f(x), f_k(x)(k=1,2,\cdots)$ 是 E 上的实值可测函数. 若对任给 $\varepsilon>0$ 以及 $\delta>0$, 存在 E 中可测子集 e 以及 K, 使得 $m(E \backslash e)<\delta$, 且有

$$|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon(k>K, x \in e).$$

试问这是哪种意义下的收敛?

证明. 依题设知, 对 $\forall \varepsilon > 0, \delta > 0$, 当 $k > K$ 时, 均有

$$m\left(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}\right) < \delta,$$

此即 $\lim\limits_{k\to\infty} m(E[f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon]) = 0$, 故这是依测度收敛. □

思考题 3. 设 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于零,$g(x)$ 是 E 上实值可测函数. 若 $m(E) = +\infty$, 试说明 $\{g(x)f_k(x)\}$ 在 E 上不一定依测度收敛于零.(提示:$g(x) = x, f_k(x) = 1/k$)

证明. $m(E) = +\infty$ 时, 设 $E = [0, \infty)$, 作函数

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, n), \\ 1/x, & x \in [n, \infty), \end{cases}$$
$$g_n(x) = x, (n \in \mathbb{N}),$$

则 $f_n(x), g_n(x)$ 在 E 上各依测度收敛于 $f(x) \equiv 0, g(x) \equiv x$. 然而 $f_n(x)g_n(x)$ 在 E 上不依测度收敛于 $f(x)g(x) = 0$, 这是因为 $\{x \in E : |f_n(x)g_n(x)| \geqslant 1\} = [n, \infty)$. □

-思考题 4-. 试问:$f_n(x) = \cos^n x (n = 1, 2, \cdots)$ 是 $[0, \pi]$ 上依测度收敛列吗?

证明. $f_n(x) = \cos^n x$ 在 $(0, \pi)$ 上收敛到 0, 于是 $f_n(x) \to f(x) = 0$, a.e. $x \in [0, \pi]$, 所以 $f_n(x)$ 依测度收敛到 0. □

-思考题 5-. 若 $f_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 在 $E \subset \mathbb{R}$ 上依测度收敛于 $f(x) \equiv 0$, 试问: 是否有

$$\lim_{n\to\infty} m\left(\{x \in E : |f_n(x)| > 0\}\right) = 0?$$

证明. 不一定, 定义中的任意小不能放宽到 0. 例如, 定义 $f_k(x) = 1/k (k \in \mathbb{N}, x \in E = [0, 1])$, 易知 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 0, 但是 $m(E[|f_k(x)| > 0]) = 1$. □

思考题 6. 设 $E \subset \mathbb{R}$ 上的可测函数列 $\{f_k(x)\}$ 满足

$$f_k(x) \geqslant f_{k+1}(x)\ (k = 1, 2, \cdots).$$

若 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛到 0, 试问:$f_k(x)$ 在 E 上是否几乎处处收敛到 0?

证明. 由 Riesz 定理, 存在 $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty} f_{k_i}(x) = 0$, a.e. $x \in E$, 从而由 $f_k(x) \geqslant f_{k+1}(x)$ 可知 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = 0$, a.e. $x \in E$. □

3.3 可测函数与连续函数的关系

(一) Лузин定理

-思考题 1-. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 试问: 是否存在 $g \in C(\mathbb{R})$, 使得

$$m(\{x \in \mathbb{R} : |f(x) - g(x)| > 0\}) = 0?$$

解. 不一定. 例如 $f(x)=\begin{cases}-1, & 0\leqslant x<1/2,\\ 1, & 1/2\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$ 对任意 $g(x)\in C(\mathbb{R})$, 考虑 $g(1/2)$ 处即可. 另外有 $f(x)=\chi_{(0,+\infty)}(x)$ 也可作反例, 可用反证法证明不存在 $g\in C(\mathbb{R})$ 满足 $g=f$, a.e. $x\in\mathbb{R}$. □

思考题 2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测, 试证明存在多项式列 $\{P_n(x)\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=f(x),\ \text{a.e. } x\in[a,b].$$

证明. 由Лузин定理, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 存在闭集 $F_n\subset[a,b]$, 有 $F_n\subset F_{n+1}, m([a,b]\backslash F_n)<1/n$, 且 $f\in C(F_n)$. 于是存在 $g\in C([a,b])$, 使得 $g(x)=f(x),\forall x\in F_n,n\in\mathbb{N}$. 由此知存在多项式 $P_n(x)$, 使得 $|g(x)-P_n(x)|<1/n,\forall n\in\mathbb{N},x\in[a,b]$, 即 $|f(x)-P_n(x)|<1/n,\forall n\in\mathbb{N},x\in F_n$.
令 $F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$, 则 $m([a,b]\backslash F)=0$. 对 $x_0\in F,\exists n_0,x_0\in F_n(n\geqslant n_0)$, 从而对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $n_1>n_0$ 且 $1/n_1<\varepsilon$, 则有

$$|f(x_0)-P_n(x_0)|<1/n<\varepsilon,$$

故命题得证. □

(二) 复合函数的可测性

思考题 1. 设 $f(x),g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数, 且 $f(x)>0(x\in\mathbb{R})$, 则 $f(x)^{g(x)}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数.

证明. 证法 1. 令 $h(u,v):=u^v\in C(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}),F(x):=h(f(x),g(x))=f(x)^{g(x)}$. 对任意 $t\in\mathbb{R}$, 令 $G_t=\{(u,v):f(u,v)>t\}=f^{-1}((t,+\infty))$, 则有

$$\mathbb{R}[F(x)>t]=\mathbb{R}[(f(x),g(x))\in G_t].$$

若 G_t 是开矩形: $G_t=(a_1,b_1)\times(c_1,d_1)$, 则 $\mathbb{R}[F(x)>t]=\mathbb{R}[f(x)\in(a_1,b_1),g(x)\in(c_1,d_1)]=\mathbb{R}[f(x)\in(a_1,b_1)]\cap\mathbb{R}[g(x)\in(c_1,d_1)]$.
对一般开集 G_t, 将其分解为可数个开区间的并: $G_t=\bigcup\limits_{n\geqslant1}J_n, J_n=(a_n,b_n)\times(c_n,d_n)$, 我们有

$$\mathbb{R}[F(x)>t]=\bigcup_{n\geqslant1}\left(\mathbb{R}[f(x)\in(a_n,b_n)]\cap\mathbb{R}[g(x)\in(c_n,d_n)]\right).$$

所以 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可测.
证法 2. 因为 $\forall t\in\mathbb{R},\mathbb{R}[\ln f(x)>t]=\mathbb{R}[f(x)>\mathrm{e}^t]\in\mathscr{M}$, 所以 $\ln f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可测函数, 所以 $g(x)\ln f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上可测函数. 令 $p(x)=\mathrm{e}^x\in C(\mathbb{R}),q(x)=g(x)\ln f(x)$, 则 $p(q(x))=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}=f(x)^{g(x)}$ 是 $\mathbb{R}$ 上可测函数. □

思考题 2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测, 且 $m\leqslant f(x)\leqslant M,g(x)$ 在 $[m,M]$ 上单调, 则 $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上可测.

证明. 不妨设 g 在 $[m,M]$ 上递增, 则 $\forall t\in\mathbb{R}$,

$$\{x\in[a,b]:g(f(x))>t\}=\begin{cases}\varnothing, & t>g(M)\\ [a,b], & t<g(m)\\ \{x\in[a,b]:f(x)>g^{-1}(t)\}, & \text{otherwise}\end{cases}$$

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测知 $\{x\in[a,b]:f(x)>g^{-1}(t)\}$ 是可测集, 故 $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上可测. □

习题 3

-1-. 设有指标集 $I,\{f_a(x):\alpha\in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上可测函数族, 试问: 函数 $S(x)=\sup\{f_\alpha(x):\alpha\in I\}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是可测的吗?

解. 不一定. 例如令 $W\subset[0,1]$ 是不可测集, 对 $\alpha\in W$, 作函数

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}1, & x=\alpha,\\ 0, & x\neq\alpha,\end{cases}\quad (x\in[0,1])$$

则 $S(x)=\chi_W(x),\mathbb{R}[S(x)>0]=W$, 故 S 不是可测函数. □

2. 设 $z=f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数,$g_1(x),g_2(x)$ 是 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 试证明 $F(x)=f(g_1(x),g_2(x))$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

证明. 证法 1. 因为 $g_1(x),g_2(x)$ 是 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 所以由定理 3.9(简单函数逼近定理), 存在可测简单函数列 $\{\phi_k(x)\}$ 和 $\{\psi_k(x)\}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\phi_k(x)=g_1(x)$, $\lim\limits_{k\to\infty}\psi_k(x)=g_2(x),\forall x\in[a,b]$. 那么由定理 3.22 知 $\{f(\phi_k(x),\psi_k(x))\}$ 也为 $[a,b]$ 上的简单可测函数列. 因为 $z=f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数, 所以 $\lim\limits_{k\to\infty}f(\phi_k(x),\psi_k(x))=f(g_1(x),g_2(x))$, 所以 $F(x)=f(g_1(x),g_2(x))$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

证法 2. $\forall t\in\mathbb{R},G:=\mathbb{R}^2[f>t]$ 是开集. 由开集构造定理, 存在可列个互不相交的半开闭矩体 $G_n,G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n$, 其中 $G_n=:I_n\times I_n',I_n,I_n'$ 都是半开闭区间. 而 $\{x\in[a,b]:F(x)>t\}=\{x\in[a,b]:(g_1(x),g_2(x))\in G\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x\in[a,b]:(g_1(x),g_2(x))\in G_n\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\{x\in[a,b]:g_1(x)\in I_n\}\cap\{x\in[a,b]:g_2(x)\in I_n'\})$, 由 $g_1(x),g_2(x)$ 是 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上的实值可测函数可知 $\{x\in[a,b]:F(x)>t\}$ 是可测集, 因此 $F(x)=f(g_1(x),g_2(x))$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数. □

-3-. 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上存在右导数, 试证明右导函数 $f_+'(x)$ 是 $[a,b)$ 上的可测函数.

证明. 由题 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上右连续, 利用书 20 页例 12 的结论, $f(x)$ 的不连续点集是可数集, 即 $f(x)$ 几乎处处连续. 因此 $f(x)$ 是可测函数, 进一步 $f(x+1/n)$ 也是可测函数. 又因为 $f_+'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}$, 由可测函数列的极限仍为可测函数可知 $f_+'(x)$ 是 $[a,b)$ 上的可测函数. □

4. 设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数, $m(E) < +\infty$, 试证明对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 E 上的有界可测函数 $g(x)$, 使得

$$m(\{x \in E : |f(x) - g(x)| > 0\}) < \varepsilon.$$

证明. 令 $E_0 = E[|f| = \infty], E_n = E[|f| \geqslant n], n = 1, 2, \cdots$, 则 $E \supset E_1 \supset \cdots E_n \supset \cdots, E_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. 又因为 $m(E) < \infty$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} m(E_n) = m\left(\lim\limits_{n\to\infty} E_n\right) = m(E_0) = 0$, 于是 $\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0$, s.t. $m(E_N) = m(E[|f| \geqslant N]) < \varepsilon$. 作函数

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E \backslash E_N, \\ 0, & x \in E_N. \end{cases}$$

可知 g 有界且可测, 而 $m(E[|f - g| > 0]) \leqslant m(E_N) < \varepsilon$, 因此 $g(x)$ 即为符合要求的函数. □

-5-. 设 $f(x)$ 以及 $f_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 都是 $A \subset \mathbb{R}$ 上几乎处处有限的可测函数. 若对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 A 的可测子集 $B : m(A \backslash B) < \varepsilon$, 使得 $f_n(x)$ 在 B 上一致收敛于 $f(x)$, 试证明 $f_n(x)$ 在 A 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

证明. 这是Егópов定理的逆命题 (但不再需要 $m(A) < \infty$ 这一条件). 对于 $\varepsilon_m = 1/2^m$, 存在 A 的可测子集 $B_m, m(A\backslash B_m) < \varepsilon_m$, 且 $f_n \rightrightarrows f$ 于 B_m. 记 $B = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=j}^{\infty} (A \backslash B_m)$, 因为

$$m(B) \leqslant m\left(\bigcup_{m=j}^{\infty} (A\backslash B_m)\right) \leqslant \sum_{m=j}^{\infty} m(A\backslash B_m) < \sum_{m=j}^{\infty} \varepsilon_m = \frac{1}{2^{j-1}}, \forall j \in \mathbb{N},$$

所以 $m(B) = 0$. $\forall x \in A \backslash B = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \bigcap\limits_{m=j}^{\infty} B_m, \exists j_0 \in \mathbb{N}, x \in \bigcap\limits_{m=j_0}^{\infty} B_m$. 因为 f_n 在 B_m 上一致收敛, 故在 x 处收敛, 又 $m(B) = 0$, 故 $f_n(x)$ 在 A 上几乎处处收敛于 $f(x)$. □

6. 设 $\{f_k(x)\}$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值可测函数列,$m(E) < +\infty$, 试证明 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = 0$(a.e. $x \in E$) 的充分且必要条件是: 对任意的 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{j\to\infty} m(\{x \in E : \sup_{k\geqslant j}\{|f_k(x)|\} \geqslant \varepsilon\}) = 0.$$

证明. 记 $S_j^{(n)} = E[\sup\limits_{k\geqslant j} |f_k(x)| \geqslant 1/n]$.

充分性. 由题, 对任给的 $\delta > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $m(S_{k_0}^{(n)}) < \delta$. 因为 $\forall n$, 有

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} E[|f_k(x)| \geqslant 1/n] \subset \bigcup_{k=k_0}^{\infty} E[|f_k(x)| \geqslant 1/n] \subset S_{k_0}^{(n)}.$$

由 δ 的任意性知 $f_k(x)$ 不收敛到 0 的点集的测度为 0:

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty}E[|f_k(x)|\geqslant 1/n]\right)=0.$$

必要性. 令 $S=E[\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=0]$, 于是 $m(E\backslash S)=0$. 因为 $S_j^{(n)}\supset S_{j+1}^{(n)}$, 且 $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}S_j^{(n)}\subset E\backslash S$, 所以

$$0\leqslant\lim_{j\to\infty}m(S_j^{(n)})=m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}S_j^{(n)}\right)\leqslant m(E\backslash S)=0\implies\forall\varepsilon>0,\lim_{j\to\infty}m(S_j^{(1/\varepsilon)})=0.$$ □

7. 设 $f(x),f_1(x),\cdots,f_k(x),\cdots$ 是 $[a,b]$ 上几乎处处有限的可测函数, 且有 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$(a.e. $x\in[a,b]$), 试证明存在 $E_n\subset[a,b](n=1,2,\cdots)$, 使得

$$m\left([a,b]\backslash\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=0,$$

而 $\{f_k(x)\}$ 在每个 E_n 上一致收敛于 $f(x)$.

证明. 由题设条件知Егóров定理的条件全部满足, 于是令 $\varepsilon_n=1/n$, 存在 $E_n\subset I:=[a,b]$, s.t. $m(I\backslash E_n)<1/n, f_n(x)$ 在 E_n 上一致收敛于 $f(x)$. 因为 $m\left([a,b]\backslash\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leqslant m([a,b]\backslash E_n)<1/n,\forall n\in\mathbb{N}$, 所以 $m\left([a,b]\backslash\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)=0$. □

8. 设 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, $\{g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $g(x)$, 试证明 $\{f_k(x)+g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)+g(x)$.

证明. 只需注意到 $E[|(f_k(x)+g_k(x))-(f(x)+g(x))|>\varepsilon]\subset E[|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon/2]\cup E[|g_k(x)-g(x)|>\varepsilon/2]$. □

9. 设 $m(E)<+\infty, f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数, 试证明 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是:

$$\lim_{k\to\infty}\inf_{\alpha>0}\{\alpha+m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\alpha\})\}=0.$$

证明. 必要性.$\forall\varepsilon>0,\alpha<\varepsilon/2,\exists N$, s.t. $m(E[|f_k(x)-f(x)|>\alpha])<\varepsilon/2,\forall k\geqslant N$. 于是 $\alpha+m(E[|f_k(x)-f(x)|>\alpha])<\varepsilon$. 对 α 取下确界前式依然成立, 再令 $k\to\infty$ 亦然. 必要性得证.
(或: 我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\inf_{\alpha>0}\{\alpha+m(E[|f_k(x)-f(x)|>\alpha])\}\\ \leqslant&\inf_{\alpha>0}\lim_{k\to\infty}(\alpha+m(E[|f_k(x)-f(x)|>\alpha]))\\ =&\inf_{\alpha>0}\{\alpha+0\}=\inf_{\alpha>0}\{\alpha\}=0,\end{aligned}$$

其中的不等号是由于 Fatou 引理. 所以必要性成立.)
充分性. 记 $E_k(\alpha)=E[|f_k(x)-f(x)|>\alpha]$, 于是任给 $\varepsilon>0,\exists N,\forall k\geqslant N,\inf\limits_{\alpha>0}\{\alpha+m(E_k(\alpha))\}<\varepsilon$.

所以对每个 $k \geqslant N, \exists \alpha_k > 0$, s.t. $\alpha_k + m(E_k(\alpha_k)) < \varepsilon \implies \alpha_k < \varepsilon$. 现在令 $\alpha_\varepsilon = \sup\limits_{k \geqslant N} \alpha_k$, 则 $\alpha_\varepsilon \leqslant \varepsilon (k \geqslant N)$. 因此, $\forall \varepsilon > 0, 0 < \delta < \varepsilon, \exists N, \forall k \geqslant N$,

$$m(E[|f_k(x) - f(x)| > \delta]) < \varepsilon.$$

这说明 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛到 $f(x)$. □

-11-. 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 且对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G \subset \mathbb{R}^n, m(G) < \varepsilon$, 使得 $f \in C(\mathbb{R}^n \backslash G)$, 试证明 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

证明. 由题, 对任意 $1/k$, 存在开集 $G_k \subset \mathbb{R}^n$, 使得 $m(G_k) < 1/k, f(x) \in C(\mathbb{R}^n \backslash G_k)$. 令 $G = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$, 则有 $m(G) = 0$. 对于任意 $t \in \mathbb{R}, \mathbb{R}^n[f(x) > t] = G[f(x) > t] \cup \mathbb{R}^n \backslash G[f(x) > t] = G[f(x) > t] \cup \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n \backslash G_k[f(x) > t])$. 因为 $m^*(G[f(x) > t]) \leqslant m^*(G) = 0$, 所以 $G[f(x) > t]$ 是零测集. 又 $f(x) \in C(\mathbb{R}^n \backslash G_k)$, 故 $\mathbb{R}^n \backslash G_k[f(x) > t]$ 是可测集, 从而 $\mathbb{R}^n[f(x) > t]$ 是可测集, 故 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数. □

12. 设 $\{f_k(x)\}$ 与 $\{g_k(x)\}$ 在 E 上都依测度收敛于零, 试证明 $\{f_k(x) \cdot g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于零.

证明. 只需注意到 $E[|f_k(x) g_k(x)| \geqslant \varepsilon] \subset E[|f_k(x)| \geqslant \sqrt{\varepsilon}] \cup E[|g_k(x)| \geqslant \sqrt{\varepsilon}]$. □

13. 设 $\{f_k(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上依测度收敛于 $f(x), g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 试证明 $\{g(f_k(x))\}$ 在 $[a, b]$ 上依测度收敛于 $g(f(x))$. 若将 $[a, b]$ 改为 $[0, +\infty)$, 结论还成立吗?

证明. 由复合函数的可测性易知 $g[f_k(x)], k = 1, 2, \cdots, g[f(x)]$ 均为 $[a, b]$ 上的可测函数. 任取 $\{g[f_k(x)]\}$ 的一个子列 $\{g[f_{k_i}(x)]\}$, 因为 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上依测度收敛于 $f(x)$, 所以存在子列 $\{f_{k_{i_j}}(x)\}$, s.t. $\lim\limits_{j \to \infty} f_{k_{i_j}}(x) = f(x)$; 又因为 $g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 所以 $\lim\limits_{j \to \infty} g(f_{k_{i_j}}(x)) = g(f(x))$, 由习题 9 的结论,$\{g\,[f_k(x)]\}$ 在 $[a, b]$ 上依测度收敛于 $g[f(x)]$. 若将 $[a, b]$ 改为 $[0, \infty)$, 结论不再成立, 反例:

$$f_n(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, n) \\ x + 1/x, & x \in [n, +\infty) \end{cases}, f(x) = x, g(x) = x^2,$$

则 $f_n(x)$ 依测度收敛到 $f(x)$, 但 $g(f_n(x))$ 显然不依测度收敛到 $g(f(x)) = x^2$. □

14. 设有定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(x)$, 且对任给的 $\delta > 0$, 存在 E 中的闭集 $F, m(E \backslash F) < \delta$, 使得 $f(x)$ 在 F 上连续, 试证明 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

证明. 证法 1. 取 $\varepsilon_k = 1/k$, 则存在开集列 $\{G_k\} : m(G_k) < 1/k (k \in \mathbb{N})$, 且 $f \in C(E \backslash G_k) (k \in \mathbb{N})$. 令 $f_k(x) = f(x) \cdot \chi_{E \backslash G_k}(x)$, 则对任给 $\varepsilon > 0$, 我们有

$$m^*(E[|f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon]) = m^*(G_k[|f(x)| \geqslant \varepsilon]) < 1/k.$$

令 $k \to \infty$ 即知 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$. 故 $f(x)$ 在 E 上可测.

证法 2. 由题, 对任意 $1/n$, 存在 E 中的闭集 $F_n, m(E\backslash F_n) < 1/n$, 使得 $f(x)$ 在 F_n 上连续. 令 $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n, E_0 = E\backslash F$, 则 $m(E_0) = m(E\backslash F) \leqslant m(E\backslash F_n) < 1/n, \forall n \in \mathbb{N}$, 所以 $m(E_0) = 0$. 对任意实数 $t \in \mathbb{R}, E[f(x) > t] = E_0[f(x) > t] \cup F[f(x) > t] = E_0[f(x) > t] \cup \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n[f(x) > t]\right)$. 因为 $m^*(E_0[f(x) > t]) \leqslant m^*(E_0) = 0$, 所以 $E_0[f(x) > t]$ 是零测集. 又因为 f 在 F_n 上连续, 所以 $F_n[f(x) > t]$ 是可测集, 从而 $E[f(x) > t]$ 是可测集, 故 $f(x)$ 是 E 上的可测函数. □

15. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上的可测函数列,$f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的实值函数. 若对任给的 $\varepsilon > 0$, 都有

$$\lim_{n \to \infty} m^*(\{x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0,$$

试问 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的可测函数吗?

证明. 是的. 依题设知, 对任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $\{n_k\}$, 有 $m^*(E_k) < 1/2^k, E_k = \{x \in [a, b] : |f_{n_k}(x) - f(x)| > 1/2^k\}$. 由此得 $m^*\left(\bigcap\limits_{N=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=N}^{\infty} E_k\right) = 0$, 故对 a.e. $x \in [a, b]$, 有 $x \in \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=N}^{\infty} E_k^c$, 从而存在 N_0, 当 $k \geqslant N_0$ 时, 有 $x \in E_k^c$. 这说明

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leqslant 1/2^k, \lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in [a, b],$$

故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可测. □

16. 设 $f(x), f_k(x)(k = 1, 2, \cdots)$ 是 $E \subset \mathbb{R}$ 上实值可测函数. 若对任给 $\varepsilon > 0$, 必有

$$\lim_{j \to \infty} m\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} \{x : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

试证明对任给 $\delta > 0$, 存在 $e \subset E$ 且 $m(e) < \delta$, 使得 $f_k(x)$ 在 $E\backslash e$ 上一致收敛于 $f(x)$.

证明. 简记 $\{x : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}$ 为 $E_k(\varepsilon)$. 取正数列 $1/i, i = 1, 2, \cdots$, 则对任给的 $\delta > 0$ 及每个 i, 存在 $j_i, m\left(\bigcup\limits_{k=j_i}^{\infty} E_k(1/i)\right) < \dfrac{\delta}{2^i}$. 令 $e = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=j_i}^{\infty} E_k(1/i)$, 则 $m(e) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} m\left(\bigcup\limits_{k=j_i}^{\infty} E_k(1/i)\right) < \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\delta}{2^i} = \delta$.

下证 $f_k(x)$ 在 $E\backslash e = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=j_i}^{\infty} \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \leqslant 1/i\}$ 上一致收敛于 $f(x)$. 事实上, 任给 $\varepsilon > 0, \exists i$, s.t. $1/i < \varepsilon$, 从而对一切 $x \in E\backslash e$, 当 $k \geqslant j_i$ 时, 有 $|f_k(x) - f(x)| < 1/i < \varepsilon$, 这说明 $f_k(x)$ 在 $E\backslash e$ 上一致收敛于 $f(x)$. □

4 Lebesgue 积分

4.1 非负可测函数的积分

(二) 非负可测函数的积分

-思考题 1-. 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots f_m(x)$ 是 E 上的非负可积函数, 则

(i) $F(x) = \left[\sum_{k=1}^{m}(f_k(x))^2\right]^{\frac{1}{2}}$ 在 E 上可积;

(ii) $G(x) = \sum_{1\leqslant i,k\leqslant m}(f_i(x)f_k(x))^{\frac{1}{2}}$ 在 E 上可积.

证明. 只需注意到

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \sum_{k=1}^{m}(mf_i^2(x))^{1/2} = \sqrt{m}\sum_{k=1}^{m} f_k(x),$$

$$0 \leqslant G(x) \leqslant \sum_{1\leqslant i,k\leqslant m}\frac{f_i(x)+f_k(x)}{2}.$$

右侧两个函数显然是可积的. □

思考题 2. 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中递增可测集列, 且 $E_k \to E(k\to\infty)$. 若 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数, 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 注意到 $f(x)\chi_{E_k}(x) \leqslant f(x)\cdot\chi_{E_{k+1}}(x)(x\in\mathbb{R}^n)$, 由 Levi 定理, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\cdot\lim_{k\to\infty}\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_E(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

-思考题 3-. 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的非负可积函数列. 若

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E(1-\mathrm{e}^{-f_k(x)})\mathrm{d}x = 0.$$

$(1-\mathrm{e}^{-t}\leqslant t, 0\leqslant t<+\infty.)$

证明. 令 $Z=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E[f_k(x)=+\infty]$, 则 $m(Z)=0$. 因此

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\int_E(1-\mathrm{e}^{-f_k(x)})\mathrm{d}x\\
=&\lim_{k\to\infty}\left(\int_Z(1-\mathrm{e}^{-f_k(x)})\mathrm{d}x+\int_{E\setminus Z}(1-\mathrm{e}^{-f_k(x)})\mathrm{d}x\right)\\
=&\lim_{k\to\infty}\int_{E\setminus Z}(1-\mathrm{e}^{-f_k(x)})\mathrm{d}x\leqslant\lim_{k\to\infty}\int_{E\setminus Z}f_k(x)\mathrm{d}x\\
=&\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=0.
\end{aligned}$$

□

思考题 4. 设 $f(x)$ 是 E 上的非负可积函数, 则对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 使得

$$\int_E f(x)\chi_{\{x\in E:f(x)>N\}}(x)\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

证明. 记 $f_n(x):=f(x)\chi_{E[f(x)\leqslant n]}(x)$, 于是 $\{f_n(x)\}$ 是非负渐升列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$. 于是由 Levi 定理,

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

于是 $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N,\int_E f(x)-\int_E f_n(x)<\varepsilon$, 所以 $\int_E f(x)\chi_{\{x\in E:f(x)>N\}}(x)\mathrm{d}x<\varepsilon$. □

思考题 5. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[0,n]}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\int_{[0,+\infty)}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$

证明. 令 $f_n(x)=(1+x/n)^n\mathrm{e}^{-2x}\chi_{[0,n]}(x)(n\in\mathbb{N})$, 则

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\mathrm{e}^{-x},f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)(x\in\mathbb{N}).$$

由此即知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1.$$

□

-思考题 6-. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[0,1]}x^n\mathrm{d}x=0.$

证明. 由于 $f_n(x)=x^n$ 是 $(0,1)$ 上的非负可积渐降列, 故由书 136 页例 2 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}x^n\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{(0,1)}x^n\mathrm{d}x=\int_{(0,1)}\lim_{n\to\infty}x^n\mathrm{d}x=0.$$

□

-思考题 7-. 设 $f^3(x)$ 是 $E(m(E)<+\infty)$ 上的非负可积函数, 则 $f^2(x)$ 在 E 上可积.

证明. 记 $A=E[f(x)\leqslant 1]$, 则

$$\int_E f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_A f^2(x)\mathrm{d}x+\int_{E\setminus A} f^3(x)\mathrm{d}x\leqslant m(A)+\int_E f^3(x)\mathrm{d}x<+\infty,$$

此即 $f^2(x)$ 在 E 上可积. □

-思考题 8-. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负可测, 则 $f^3(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 m(\{x\in[a,b]:f(x)\geqslant n\})<+\infty.$$

证明. 令 $E_n=\{x\in[a,b]:n\leqslant f(x)<n+1\}(n\in\mathbb{N})$, 则

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n)&\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n)+(b-a),\\
\sum_{n=0}^{\infty} n^2m(E_n)&\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2m(E_n)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty} n^2m(E_n)+2\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n)+(b-a),\\
\sum_{n=0}^{\infty} n^3m(E_n)&\leqslant\int_a^h f^3(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}(n^3+3n^2+3n+1)m(E_n)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty} n^3m(E_n)+3\sum_{n=1}^{\infty} n^2m(E_n)+3\sum_{n=1}^{\infty} nm(E_n)+(b-a).
\end{aligned}$$

从而 $f^3(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3m(E_n)<+\infty$.

因为 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2=[n(n+1)(2n+1)]/6=n^3/3+n^2/2+n/6$, 所以

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n^3m(E_n)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2m(E_n)+\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty} nm(E_n)\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)m(E_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^2\sum_{n=k}^{\infty} m(E_n)\right)\\
=&\sum_{k=1}^{\infty} k^2m(\{x\in[a,b]:f(x)\geqslant k\}).
\end{aligned}$$

由此即得所证. □

思考题 9. 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数列. 若有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x),f_k(x)\leqslant f(x)(x\in E:k=1,2,\cdots),$$

则对 E 的任一可测子集 e, 有

$$\lim_{k\to\infty}\int_e f_k(x)\mathrm{d}x=\int_e f(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 一方面, 由题可知 $\int_e f_k(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_e f(x)\mathrm{d}x$, 所以 $\overline{\lim_{k\to\infty}}\int_e f_k(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_e f(x)\mathrm{d}x$. 另一方面, 由 Fatou 引理, 我们又有

$$\int_e f(x)\mathrm{d}x=\int_e\underline{\lim_{k\to\infty}}f_k(x)\mathrm{d}x\leqslant\underline{\lim_{k\to\infty}}\int_e f_k(x)\mathrm{d}x.$$

故命题得证. □

思考题 10. 设 $\{E_n\}\subset[0,1]$ 是可测集列. 若 $m\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n\right)=0$, 则对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $[0,1]$ 的可测子集 A, 使得 $m([0,1]\backslash A)<\varepsilon$, 且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}m(A\cap E_n)<+\infty.$$

(注意 $\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x)<+\infty$, a.e. $x\in[0,1]$.)

证明. 记 $Z:=\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k$, 则 $m(Z)=0$, 且 $\forall x\in[0,1]\backslash Z, x$ 只属于 $\{E_n\}$ 中的有限个 (否则 x 应属于 Z). 所以我们得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x)<+\infty$, a.e. $x\in[0,1]$. 由Лузин定理, $\forall\varepsilon>0$, 存在闭集 $A\subset[0,1]$, 使得 $m([0,1]\backslash A)<\varepsilon$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x)$ 为 A 上的连续函数. 又因为 A 是有界闭集, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x)$ 在 A 上有界, 故 $\exists M>0, \sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x)\leqslant M, \forall x\in A$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}m(A\cap E_n)&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A\cap E_n}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_A\chi_{A\cap E_n}(x)\mathrm{d}x\\&=\int_A\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A\cap E_n}(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_A\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant M\cdot m(A)<+\infty,\end{aligned}$$

其中用到了逐项积分定理. □

4.2 一般可测函数的积分

(一) 积分的定义与初等性质

-思考题 1-. 若 $f \in L(\mathbb{R}^n), g \in L(\mathbb{R}^n)$, 则函数

$$m(x) = \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{f(x), g(x)\}, M(x) = \max_{x\in\mathbb{R}^n}\{f(x), g(x)\}$$

在 $\mathbb{R}^n$ 上可积.

证明. $m(x) = \dfrac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}, M(x) = \dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$. □

-思考题 2-. 设有定义在 $[0,1]\times[0,1]$ 的二元函数:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & xy\text{为无理数}, \\ 2, & xy\text{为有理数}, \end{cases}$$

则 $\displaystyle\iint_{[0,1]^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$.

证明. 设 $[0,1]$ 中的有理数全体为 $\{r_n\}$, 则

$$Z := \{(x,y)\in[0,1]\times[0,1] : xy \in \mathbb{Q}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{(x, r_n/x) : x\in[0,1]\}.$$

对任意的 n, 上式最右侧的集合是平面中的曲线段, 故由外测度的次可数可加性知 $m^*(Z) = 0$. 所以 $f = 1$, a.e. $(x,y)\in[0,1]^2$, 于是

$$\iint_{[0,1]^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{[0,1]^2} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$

□

-思考题 3-. 若 $f \in L(E)$, 则

$$m(\{x\in E : |f(x)| > k\}) = O\left(\frac{1}{k}\right)(k\to\infty).$$

证明. 令 $E_k = E[|f(x)| > k]$, 则

$$k\cdot m(E_k) \leqslant \int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}x < +\infty.$$

这说明 $m(E_k) = O(1/k)(k\to\infty)$. □

思考题 4. 设 $f \in L((0,+\infty))$, 令 $f_n(x) = f(x)\chi_{(0,n)}(x)(n = 1,2,\cdots)$, 则 $f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上依测度收敛于 $f(x)$.

证明. 对任给 $\varepsilon>0$, 令 $E_n=\{x\in(0,\infty):|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}(n\in\mathbb{N})$, 则

$$\begin{aligned}m(E_n)\cdot\varepsilon&\leqslant\int_{E_n}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}|f(x)(\chi_{(0,n)}(x)-1)|\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}|f(x)\chi_{[n,\infty)}(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_n^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x\to0(n\to\infty).\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}m(E_n)=0$, 则 $f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 依测度收敛于 $f(x)$. □

-思考题 5-. 设 $f\in L([0,1])$. 若 $\mathrm{e}^{\int_{[0,1]}f(x)\mathrm{d}x}=\int_{[0,1]}\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x$, 则 $f(x)=C$(常数), a.e. $x\in[0,1]$. ($\mathrm{e}^x(x-a)+\mathrm{e}^a=\mathrm{e}^x$ 当且仅当 $x=a$.)

证明. 由 e^x 严格凸知 $\mathrm{e}^x\geqslant\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^a(x-a),\forall x$, 且等号成立当且仅当 $x=a$. 令 $C=\int_0^1f(x)\mathrm{d}x$.
证法 1. 反证, 假定结论不真, 则存在 $E\subset[0,1]:m(E)>0$, 使得

$$\mathrm{e}^C(f(x)-C)+\mathrm{e}^C<\mathrm{e}^{f(x)}(x\in E)\implies\mathrm{e}^C\int_0^1(f(x)-C)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^C<\int_0^1\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x.$$

注意到 $\int_0^1(f(x)-C)\mathrm{d}x=0$, 故由上式可知

$$\mathrm{e}^{\int_0^1f(x)\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^C<\int_0^1\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x$$

这与题设矛盾.
证法 2. 由题,

$$\int_0^1\left(\mathrm{e}^{f(x)}-\mathrm{e}^C-\mathrm{e}^C(f(x)-C)\right)\mathrm{d}x=0.$$

因为被积函数是非负的, 故其几乎处处为 0, 即 $\mathrm{e}^{f(x)}-\mathrm{e}^C-\mathrm{e}^C(f(x)-C)=0$, a.e. $x\in[0,1]$, 这等价于 $f(x)=C$, a.e. $x\in[0,1]$. □

思考题 6. 设 $f\in L(\mathbb{R}^1)$, 且对任意的区间 I, 记

$$f_I=\frac{1}{|I|}\int_If(x)\mathrm{d}x,E_I=\{x\in I:f(x)>f_I\},$$

则 $\int_I|f(x)-f_I|\mathrm{d}x=2\int_{E_I}(f(x)-f_I)\mathrm{d}x$.

证明. 根据 E_I 的定义, 我们有

$$\int_I |f(x)-f_I|\mathrm{d}x = \int_{E_I}(f(x)-f_I)\mathrm{d}x + \int_{I\setminus E_I}(f_I - f(x))\mathrm{d}x =: J_1 + J_2,$$

$$\begin{aligned} J_2 &= f_I(|I|-m(E_I)) - f_I\cdot|I| + \int_{E_I} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{E_I} f(x)\mathrm{d}x - \int_{E_I} f_I\mathrm{d}x = \int_{E_I}(f(x)-f_I)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

由此即得所证. □

-思考题 7-. 设 $f\in L(\mathbb{R}), g\in L(\mathbb{R})$, 且有

$$\int_{[a,x]} f(t)\mathrm{d}t = \int_{[a,x]} g(t)\mathrm{d}t, x\in\mathbb{R},$$

则 $f(x)=g(x)$, a.e. $x\in\mathbb{R}$.

证明. 令 $F(x)=f(x)-g(x)$, 则 $\int_{[a,x]} F(t)\mathrm{d}t = 0$. 由教材 150 页例 6 知 $F(x)=0$, a.e. $x\in\mathbb{R}$. □

思考题 8. 设 $f\in L(\mathbb{R})$. 若对 $\mathbb{R}$ 上任意的有界可测函数 $\varphi(x)$, 都有

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则 $f(x)=0$, a.e. $x\in\mathbb{R}$.

证明. 对任给的 $n\in\mathbb{N}$, 设 $\varphi_n(x)=\chi_{\mathbb{R}[f>1/n]}(x)$, 根据 Chebyshev 不等式有

$$\frac{1}{n}m(\mathbb{R}[f>1/n]) \leqslant \int_{\mathbb{R}[f>1/n]} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x = 0,$$

所以 $m(\mathbb{R}[f>1/n])=0$. 同理 $m(\mathbb{R}[f<-1/n])=0$. 因为 $m(\mathbb{R}[f\neq 0]) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbb{R}[f>1/n]\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbb{R}[f<-1/n]\right)$, 所以由次可数可加性得到,

$$m(\mathbb{R}[f\neq 0]) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(\mathbb{R}[f>1/n]) + \sum_{n=1}^{\infty} m(\mathbb{R}[f<-1/n]) = 0.$$

所以 $m(\mathbb{R}[f\neq 0])=0$, 因此 $f(x)=0$, a.e. $x\in\mathbb{R}$. □

(二) 控制收敛定理

-思考题 1-. 设 $f\in C([a,b]), \varphi\in C([a,b]), F\in L([a,b])$, 且对 $x\in[a,b]$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x), \quad \varphi_n\in C^{(1)}([a,b]) \quad (n=1,2,\cdots).$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi_n(x) = f(x)\varphi_n(x), \quad |f(x)\varphi_n(x)|\leqslant F(x),$$

试证明 $\varphi'(x)=f(x)\varphi(x), x\in[a,b]$.

证明. 由题设知 $\varphi_n(t)-\varphi_n(a)=\int_a^t f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x(n\in\mathbb{N}, a\leqslant t\leqslant b)$, 根据控制收敛定理, 令 $n\to\infty$ 可得

$$\varphi(t)-\varphi(a)=\int_a^t f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \implies \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}=f(t)\varphi(t)(a\leqslant t\leqslant b).$$

□

思考题 2. 试证明函数列 $\{\cos nx\}$ 在 $[-\pi,\pi)$ 不是依测度收敛于 0 的.

证明. 反证, 设 $\{\cos nx\}$ 在 $[-\pi,\pi)$ 依测度收敛于 0, 则由 $\{x\in[-\pi,\pi):\cos^2 nx\geqslant\varepsilon\}=\{x\in[-\pi,\pi):|\cos nx-0|\geqslant\sqrt{\varepsilon}\}$ 知 $\{\cos^2 nx\}$ 在 $[-\pi,\pi)$ 依测度收敛于 0. 由 Riesz 定理, 存在 $\{n_k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\cos^2 n_k x=0$, a.e. $x\in[-\pi,\pi)$. 于是由控制收敛定理,

$$0=\int_{[-\pi,\pi)}\lim_{k\to\infty}\cos^2 n_k x\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{[-\pi,\pi)}\cos^2 n_k x\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2n_k x}{2}\mathrm{d}x=\pi.$$

这是一个矛盾. (注：事实上, 它在 $[-\pi,\pi]$ 上也不依测度收敛到 0) □

思考题 3. 设 $f\in L((0,+\infty))$, 试证明函数

$$g(x)=\int_{[0,\infty)}\frac{f(t)}{x+t}\mathrm{d}t$$

在 $(0,+\infty)$ 上连续.

证明. 对任给的 $x_0>0$ 和趋于 x_0 的列 $\{x_n\}$, 当 n 充分大时有 $x_n>x_0/2$, 故

$$\left|\frac{f(t)}{x_n+t}\right|\leqslant\frac{|f(t)|}{x_0/2}\in L((0,+\infty)).$$

由控制收敛定理,

$$\lim_{n\to\infty}g(x_n)=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)}\frac{f(t)}{x_n+t}\mathrm{d}t=\int_{[0,\infty)}\frac{f(t)}{x_0+t}\mathrm{d}t=g(x_0).$$

因为 $\{x_n\}$ 是任意的, 所以由 Heine 原理有 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$, 此即 g 在 x_0 处连续. 再由 $x_0>0$ 的任意性得结论. □

-思考题 4-. 设 $f\in L(E)$, 记 $E_k=\{x\in E:|f(x)|<1/k\}$, 试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

证明. 因为有 $|f(x)|\chi_{E_k}(x) < 1/k(x \in E)$, 所以 $|f(x)|\chi_{E_k}(x) \to 0(k \to \infty, x \in E)$. 因为 $|f(x)|$ 是 $\{|f(x)|\chi_{E_k}(x)\}$ 的控制函数, 故有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty} f(x)\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x = 0.$$

□

思考题 5. 设 $f, g \in L(E), f_k, g_k \in L(E), |f_k(x)| \leqslant M(k = 1, 2, \cdots)$,

$$\int_E |f_k(x) - f(x)|\mathrm{d}x \to 0(k \to \infty),$$
$$\int_E |g_k(x) - g(x)|\mathrm{d}x \to 0(k \to \infty),$$

试证明

$$\int_E |f_k(x)g_k(x) - f(x)g(x)|\mathrm{d}x \to 0(k \to \infty).$$

证明. $\forall\varepsilon > 0$, 设 $E_k(\varepsilon) = E[|f_k - f| \geqslant \varepsilon]$. 由 Chebyshev 不等式,

$$\varepsilon \cdot m(E_k(\varepsilon)) \leqslant \int_{E_k(\varepsilon)} |f_k(x) - f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_E |f_k(x) - f(x)|\mathrm{d}x \to 0(k \to \infty),$$

故 f_k 依测度收敛到 f. 又由 $|(f_k(x) - f(x))g(x)| \leqslant 2M|g(x)| \in L(E)$ 以及依测度收敛型控制收敛定理知

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |(f_k(x) - f(x))g(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\int_E |f_k(x)g_k(x) - f(x)g(x)|\mathrm{d}x \\
\leqslant &\int_E |f_k(x)(g_k(x) - g(x))|\mathrm{d}x + \int_E |(f_k(x) - f(x))g(x)|\mathrm{d}x \\
\leqslant &M\int_E |g_k(x) - g(x)|\mathrm{d}x + \int_E |(f_k(x) - f(x))g(x)|\mathrm{d}x \\
\to &0(k \to \infty).
\end{aligned}$$

□

-思考题 6-. 设 $f_k \in L(E)(k = 1, 2, \cdots)$, 且 $f_k(x)$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$. 若 $m(E) < +\infty$, 试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

证明. $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} f \implies \exists N, \forall n \geqslant N, \forall x \in E, |f_n(x) - f(x)| < 1 \implies |f_n(x)| < 1 + |f(x)|$. 特别地,

由 4.2(一) 的思考题 1 和数学归纳法可知 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}|f_i(x)|\in L(E)$. 因此, 我们有

$$|f_n(x)|\leqslant\begin{cases}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}|f_i(x)|, & 1\leqslant n\leqslant N\\ |f(x)|+1, & n\geqslant N\end{cases}<\max_{1\leqslant i\leqslant N}|f_i(x)|+2\in L(E).$$

由控制收敛定理知结论成立. □

-思考题 7-. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负可积, 且有 $E\subset(0,+\infty)$,

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=1,$$

则

$$\int_E f(x)\cos x\mathrm{d}x\neq 1.$$

证明. 反证, 若 $\int_E f(x)\cos x\mathrm{d}x=1$, 则 $\int_E f(x)(1-\cos x)\mathrm{d}x=0$. 被积函数非负, 故 $f(x)(1-\cos x)=0$, a.e. $x\in E$. 不妨设 $Z\subset E: m(Z)=0, f(x)(1-\cos x)=0, x\in E\backslash Z$. 再命 $Z_1=Z\cup\{2k\pi\in E:k\in\mathbb{N}_+\}\subset E$, 且 $m(Z_1)=0, f(x)=0, x\in E\backslash Z_1$. 由此可得 $f(x)=0$, a.e. $x\in E$, 进而 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$, 矛盾. □

思考题 8. 设 $f\in L(\mathbb{R}), f_n\in L(\mathbb{R})(n=1,2,\cdots)$, 且有

$$\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n^2}(n=1,2,\cdots),$$

则

$$f_n(x)\to f(x),\ \text{a.e. } x\in\mathbb{R}.$$

证明. 注意到 $|f_n(x)-f(x)|$ 非负可测, 故

$$\int_{\mathbb{R}}\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty,$$

由定理 4.3 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)-f(x)|$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处有限, 所以几乎处处收敛. 由于级数有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 $\Longrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 成立, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, a.e. $x\in\mathbb{R}$. □

-思考题 9-. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_n|<\ln n(n=2,3,\cdots)$, 则

$$\int_{[2,+\infty)}\sum_{n=2}^{\infty}a_n n^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{\ln n}n^{-2}.$$

证明. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\int_2^{+\infty}|a_n|n^{-x}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{|a_n|}{\ln n}n^{-2}<\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$. 令 $f_n(x)=\sum\limits_{k=2}^{n}a_k k^{-x}(x\geqslant 2)$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\sum_{k=2}^{\infty}a_k k^{-x}, |f_n(x)|\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|n^{-x}(x\geqslant 2).$$

因为 $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|n^{-x}$ 可积, 所以由控制收敛定理,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\int_2^{+\infty}a_nn^{-x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_2^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\sum_{n=2}^{\infty}a_nn^{-x}\mathrm{d}x.$$

(也可利用逐项积分定理) □

思考题 10. 设定义在 $E\times\mathbb{R}^n$ 的函数 $f(x,y)$ 满足:
(i) 对每一个 $y\in\mathbb{R}^n$, $f(x,y)$ 是 E 上的可测函数;
(ii) 对每一个 $x\in E$, $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数.
若存在 $g\in L(E)$, 使得 $|f(x,y)|\leqslant g(x)$, a.e. $x\in E$, 则函数

$$F(y)=\int_E f(x,y)\mathrm{d}x$$

是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数.

证明. 对任给的 $y_0\in\mathbb{R}^n$ 和 $y_n\to y_0(n\to\infty)$, 由题中 (ii) 知 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x,y_n)-f(x,y_0))=0,\forall x\in E$. 又因为 $|f(x,y_n)-f(x,y_0)|\leqslant 2g(x)\in L(E)$, a.e. $x\in E$, 所以由控制收敛定理容易得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E(f(x,y_n)-f(x,y_0))\mathrm{d}x=0\implies\lim\limits_{n\to\infty}F(y_n)=F(y_0)$. 由 Heine 原理知 $\lim\limits_{y\to y_0}F(y)=F(y_0)$, 所以 F 在 y_0 处连续. 再由 y_0 的任意性知 F 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数. □

4.3 可积函数与连续函数的关系

本节没有习题.

4.4 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系

-思考题 1-. 设 $F\subset[0,1]$ 是闭集, 且 $m(F)=0$, 则 $\chi_F\in\mathcal{R}([0,1])$.

证明. 对 $x_0\in(0,1)$ 且 $x_0\notin F$, 则存在 $\delta>0$, 使得 $\chi_F(x)=0(x_0-\delta<x<x_0+\delta)$. 这说明 $\chi_F(x)$ 的不连续点集的测度为零. □

-思考题 2-. 设 $f:[0,1]\to[a,b]$ 是 Riemann 可积函数, $g\in C([a,b])$, 则 $g(f(x))$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积.

证明. 这是数学分析中的经典习题, 考虑不连续点集依然是零测集即可. □

思考题 3. 设 $f(x),g(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数, $E\subset[a,b]$, 且 $\bar{E}=[a,b]$. 若有

$$f(x)=g(x),x\in E,$$

则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 设 D_1, D_2 是 f, g 在 $[a,b]$ 上的不连续点集. 因为 $f(x), g(x) \in \mathcal{R}([a,b])$, 所以 $m(D_1) = m(D_2) = 0 \implies m(D_1 \cup D_2) = 0$. $\forall x_0 \notin D_1 \cup D_2$, f, g 均在 x_0 处连续. 由 $E \subset [a,b]$ 且 $\bar{E} = [a,b]$ 知 $\forall \varepsilon > 0, \exists y_0 \in E, y_0 \in B(x_0, \varepsilon)$. 于是存在 $\{x_n\} \in E$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, f(x_n) = g(x_n) (n = 1, 2, \cdots)$, 且 $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0) \implies f(x) = g(x), \forall x \notin D_1 \cup D_2 \implies \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. □

-思考题 4-. 函数 $f(x) = \sin x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上不可积. 提示: 注意

$$\int_{\sqrt{(n-1)\pi}}^{\sqrt{n\pi}} |f(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

证明. 作换元 $t = x^2$ 可得上面式子, 于是

$$\int_0^{+\infty} |\sin x^2|\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\sqrt{(n-1)\pi}}^{\sqrt{n\pi}} |f(x)|\mathrm{d}x \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} = +\infty,$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上不可积. □

4.5 重积分与累次积分的关系

(一) Fubini 定理

-思考题 1-. 设 $f(x,y)$ 在 $[0,1] \times [0,1]$ 上可积, 试证明

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

证明.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\chi_{\{(x,y):y\leqslant x\}}(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\chi_{\{(x,y):y\leqslant x\}}(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

□

思考题 2. 设 A, B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, 试证明

$$\int_{\mathbb{R}^n} m((A - \{x\}) \cap B)\mathrm{d}x = m(A) \cdot m(B).$$

证明. 对任意 $y \in \mathbb{R}$, 有 $\chi_{(A-\{x\})\cap B}(y) = \chi_{A-\{x\}}(y)\chi_B(y) = \chi_A(y+x)\chi_B(y) = \chi_{A-\{y\}}(x)\chi_B(y)$.

这是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数, 于是由 Tonelli 定理和测度的平移不变性,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} m((A-\{x\})\cap B)\mathrm{d}x \\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{(A-\{x\})\cap B}(y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{A-\{y\}}(x)\chi_B(y)\mathrm{d}y \\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{A-\{y\}}(x)\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^n}\chi_B(y)\mathrm{d}y=m(A-\{y\})m(B)=m(A)m(B),
\end{aligned}$$

故命题得证. □

习题 4

-1-. 设 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上几乎处处大于零的可测函数, 且满足 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$, 试证明 $m(E)=0$.

证明. 反证, 假设 $m(E)>0$, 记 $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}E[f(x)>1/n]:=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, 则 $E=(E\backslash F)\cup F$. 由 $m(E\backslash F)=0$ 知必存在某个 n_0, 使得 $m(E_{n_0})>0$, 此时有 $0=\int_E f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{E_{n_0}}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{n_0}m(E_{n_0})$, 得 $m(E_{n_0})=0$, 矛盾. 从而假设不成立. □

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负可积, $f(0)=0$, 且 $f'(0)$ 存在, 试证明存在积分

$$\int_{[0,+\infty)}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

证明. 因为我们有 $\lim_{x\to0^+}f(x)/x=\lim_{x\to0^+}[f(x)-f(0)]/(x-0)=f'(0)$, 所以对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$0\leqslant f(x)/x<f'(0)+\varepsilon, 0<x<\delta.$$

由此知 $f(x)/x$ 在 $[0,\delta]$ 上可积, 且从不等式

$$\int_\delta^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\delta}\int_\delta^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x<+\infty,$$

可知 $f(x)/x$ 在 $[\delta,\infty)$ 上可积. □

3. 设 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数. 若存在 $E_k\subset E, m(E\backslash E_k)<1/k(k=1,2,\cdots)$, 使得极限

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x$$

存在, 试证明 $f(x)$ 在 E 上可积.

证明. 由题设知 $m(E\backslash E_{2^i})<1/2^i$, 由此又得 $m\left(\overline{\lim\limits_{i\to\infty}}(E\backslash E_{2^i})\right)=0$. 从而我们有

$$\begin{aligned}
\int_E f(x)\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_E(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\chi_{E\backslash E_k}(x)+\chi_{E_k}(x))\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varliminf_{k\to\infty}(\chi_{E\backslash E_k}(x)+\chi_{E_k}(x))\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\left[f(x)\varlimsup_{k\to\infty}\chi_{E\backslash E_k}(x)+f(x)\varliminf_{k\to\infty}\chi_{E_k}(x)\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_{\varlimsup\limits_{k\to\infty}(E\backslash E_k)}(x)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varliminf_{k\to\infty}\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x \\
&\leqslant 0+\varliminf_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x=\varliminf_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x<+\infty.
\end{aligned}$$

□

-4-. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上非负可积函数, 令

$$F(x)=\int_{(-\infty,x]} f(t)\mathrm{d}t, x\in\mathbb{R}.$$

若 $F\in L(\mathbb{R})$, 试证明 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x=0$.

证明. $F(x)$ 是非负递增函数, 且有

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.$$

由此可知, 若极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)\neq 0$, 则 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不可积. □

-5-. 设 $f_k(x)(k=1,2,\cdots)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上非负可积函数列. 若对任一可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$, 都有

$$\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f_{k+1}(x)\mathrm{d}x,$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E\lim_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 由题 $\int_E [f_{k+1}(x)-f_k(x)]\mathrm{d}x\geqslant 0$, 注意到这是对任一可测集 E 都成立的, 故必有 (若在一个正测集上不满足下式, 则容易得到矛盾)

$$f_{k+1}(x)-f_k(x)\geqslant 0 \implies f_{k+1}(x)\geqslant f_k(x), \text{ a.e. } x\in\mathbb{R}^n.$$

由此知结论成立. □

-6-. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}$ 上的非负可测函数, 且 $m(E)=1$. 若有 $f(x)g(x)\geqslant 1, x\in E$, 试证明

$$\left(\int_E f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_E g(x)\mathrm{d}x\right)\geqslant 1$$

(注意 $\left(\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_E f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_E g^2(x)\mathrm{d}x$).

证明. 直接利用提示 (此即 Schwarz 不等式, 见书 251 页) 可得 $\left(\int_E\sqrt{f(x)g(x)}\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_E g(x)\mathrm{d}x$. 又因为 $m(E)=1$, $\sqrt{f(x)g(x)}\geqslant 1$, 故结论成立. □

7. 假设有定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(x)$. 如果对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $g,h\in L(\mathbb{R}^n)$, 满足 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)(x\in\mathbb{R}^n)$, 并且使得 $\int_{\mathbb{R}^n}(h(x)-g(x))\mathrm{d}x<\varepsilon$, 试证明 $f\in L(\mathbb{R}^n)$.

证明. 先证明一个引理, 在第 8 题中也会用到.

Lemma. $\{f_k\}$ 是 E 上非负可测函数列, 若 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=0$, 则 f_k 在 E 上依测度收敛于 0.

Proof. $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall k\geqslant N$, $\int_E f_k(x)\mathrm{d}x<\varepsilon^2$, 所以

$$\begin{aligned}
&\varepsilon m(\{f_k(x)\geqslant\varepsilon\})\leqslant\int_E f_k(x)\chi_{\{f_k(x)\geqslant\varepsilon\}}\mathrm{d}x\leqslant\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\to 0\\
\Longrightarrow\ & m(\{f_k(x)\geqslant\varepsilon\})\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x<\frac{1}{\varepsilon}\cdot\varepsilon^2=\varepsilon(\text{Chebyshev不等式})\\
\Longrightarrow\ & f_k\ \text{在}E\ \text{上依测度收敛到}0.\ \text{Q.E.D.}
\end{aligned}$$

由题,$\forall k\in\mathbb{N}$, 存在可积函数列 $\{g_k(x)\}$ 和 $\{h_k(x)\}$, 使得 $g_k(x)\leqslant f(x)\leqslant h_k(x)$, 且 $\int_{\mathbb{R}^n}[h_k(x)-g_k(x)]\mathrm{d}x<1/k$. 于是 $\{h_k-g_k\}$ 为非负可积函数列, 且 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}[h_k(x)-g_k(x)]\mathrm{d}x=0$, 因此由上面引理知 $h_k(x)-g_k(x)$ 依测度收敛到 0.
由 Riesz 定理, 存在子列 $\{h_{k_j}-g_{k_j}\}$, 使得 $\lim\limits_{j\to\infty}[h_{k_j}(x)-g_{k_j}(x)]=0$, a.e. $x\in\mathbb{R}^n$. 因为 $g_{k_j}(x)\leqslant f(x)\leqslant h_{k_j}(x)$, 所以 $h_{k_j}(x)-f(x)\leqslant h_{k_j}(x)-g_{k_j}(x)$. 不等式两边同时取极限, 得 $\lim\limits_{j\to\infty}h_{k_j}(x)=f(x)$, a.e. $x\in\mathbb{R}^n$, 从而 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 又因为 $|f(x)|\leqslant\max\{|g_k(x)|,|h_k(x)|\}\leqslant|g_k(x)|+|h_k(x)|$, 由 g_k,h_k 的可积性知 $|f|$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的可积函数, 从而 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上的可积函数. □

8. 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中测度有限的可测集列, 且有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|\chi_{E_k}(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0,$$

试证明存在可测集 E, 使得 $f(x)=\chi_E(x)$, a.e. $x\in\mathbb{R}^n$.

证明. 由第 7 题给出的引理知 χ_{E_k} 依测度收敛到 f, 于是由 Riesz 定理, 存在 $\{E_k\}$ 的子列 $\{E_{k_j}\}$, 使得 $\lim\limits_{j\to\infty}\chi_{E_{k_j}}(x)=f(x)$, a.e. $x\in\mathbb{R}^n$, 令 $E=\lim\limits_{j\to\infty}E_{k_j}$ 是可测集, 则 $f(x)=\chi_E(x)$, a.e. $x\in\mathbb{R}^n$. □

9. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的递增函数, 试证明对 $E\subset[0,1], m(E)=t$, 有 $\displaystyle\int_{[0,t]}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

证明. 令 $E_1=E\cap[0,t], E_2=[0,t]\backslash E, E_3=E\cap[t,1]$, 则 $E_1\cup E_2=[0,t], E_1\cup E_3=E, m(E_2)=m(E_3)$. 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^t f(x)\mathrm{d}x&=\int_{E_1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_2}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{E_1}f(x)\mathrm{d}x+f(t)\cdot m(E_2)\\&=\int_{E_1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_3}f(t)\mathrm{d}x\leqslant\int_{E_1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_3}f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

10. 设 $f\in L(\mathbb{R}^n), E\subset\mathbb{R}^n$ 是紧集, 试证明

$$\lim_{|y|\to\infty}\int_{E+\{y\}}|f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

证明. 由 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是紧集可知 E 是有界闭集, 故存在 $M>0$, 使得 $|x|\leqslant M,\forall x\in E$. 又因为 $f\in L(\mathbb{R}^n)$, 所以 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, $\displaystyle\int_{\{x:|x|\geqslant N\}}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$. 取 $N_1=N+2M$, 则当 $|y|>N_1$ 时,$E+\{y\}\subset\{x:|x|\geqslant N\}$, 故 $\displaystyle\int_{E+\{y\}}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$, 从而 $\displaystyle\lim_{|y|\to\infty}\int_{E+\{y\}}|f(x)|\mathrm{d}x=0$. □

11. 证明下列等式:
(i)$\displaystyle\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{(0,\infty)}\frac{x^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}(\alpha>1)$;

证明. 注意到 $\displaystyle\frac{x^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^x-1}=\mathrm{e}^{-x}\frac{x^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-x}}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-nx}(x>0)$, 由非负可测函数逐项积分定理得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令}x=t/n}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\Gamma(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}(\alpha>1).$$

□

12. 设 $f\in L(\mathbb{R}), a>0$, 试证明级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{x}{a}+n\right)$$

在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处绝对收敛, 且其和函数 $S(x)$ 以 a 为周期, 且 $S\in L([0,a])$.

证明. 由 $\displaystyle S(x+a)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{x+a}{a}+n\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{x}{a}+1+n\right)=S(x)$, 知 $S(x)$ 以 a 为周期,

故只需在 $[0,a]$ 上考察相应问题即可. 由非负可测函数的逐项积分定理,

$$\begin{aligned}\int_0^a \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|f\left(\frac{x}{a}+n\right)\right|\mathrm{d}x &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^a\left|f\left(\frac{x}{a}+n\right)\right|\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a\int_n^{n+1}|f(t)|\mathrm{d}t = a\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t < +\infty,\end{aligned}$$

所以 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(x/a+n)$ 在 $[0,a]$ 上几乎处处绝对收敛, 故它在 $\mathbb{R}$ 上也就几乎处处绝对收敛. 又有

$$\frac{1}{a}\int_0^a S(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

这说明 $S \in L([0,a])$. □

13. 设 $f \in L(\mathbb{R}), p > 0$, 试证明

$$\lim_{n\to\infty} n^{-p} f(nx) = 0,\ \text{a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

证明. 由非负可测函数的逐项积分定理, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}|f(nx)|\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}\int_{\mathbb{R}}|f(nx)|\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}n^{-1}\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\mathrm{d}t < +\infty.\end{aligned}$$

于是我们得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-p}|f(nx)| \in L(\mathbb{R})$, 于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-p}f(nx) \in L(\mathbb{R})$, 进而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-p}f(nx)$ 几乎处处有限. 由级数的知识立得 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-p}f(nx) = 0$, a.e. $x \in \mathbb{R}$. □

14. 设 $x^s f(x), x^t f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可积, 其中 $s < t$, 试证明积分

$$\int_{[0,+\infty)} x^u f(x)\mathrm{d}x, u \in (s,t)$$

存在且是 $u \in (s,t)$ 的连续函数.

证明. $\forall x \in (0,+\infty), |x^u f(x)| \leqslant |x^s f(x)| + |x^t f(x)| (s < u < t)$, 而右侧两函数在 $(0,\infty)$ 均可积, 所以 $|x^u f(x)|$ 可积, 此即 $\int_{[0,+\infty)} x^u f(x)\mathrm{d}x$ 存在. 进一步, 对任意 $u_n \to u, \exists N, \forall n > N, s < u_n < t$, 于是由控制收敛定理,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)} x^{u_n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{[0,\infty)}\lim_{n\to\infty} x^{u_n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{[0,+\infty)} x^u f(x)\mathrm{d}x,$$

由 Heine 原理知原积分关于 $u \in (s,t)$ 连续. □

16. 设 $f \in L([0,1])$, 试证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)\mathrm{d}x = 0$$

$(\ln(1+x^2) \leqslant x, x \geqslant 0)$.

证明. 记 $f_n(x) = n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)$, 则 f_n 在 $[0,1]$ 上可测. 因为当 $x \geqslant 0$ 时, $\ln(1+x^2) \leqslant x$, 所以 $f_n(x) \leqslant n\cdot\frac{|f(x)|}{n} = |f(x)|$. 又因为 $f \in L([0,1])$, 所以 $f_n \in L([0,1])$, 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)\mathrm{d}x = \int_{[0,1]}\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)\mathrm{d}x = 0.$$

□

18. 设 $f \in L(E)$, 且 $f(x) > 0 (x \in E)$, 试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E (f(x))^{1/k}\mathrm{d}x = m(E).$$

证明. 记 $f_k(x) = [f(x)]^{1/k}$. 因为 $f \in L(E)$, 故 $f(x) < \infty$, a.e. $x \in E$. 令 $E_0 = \{x \in E : f(x) = \infty\}, E_1 = \{x \in E : 1 < f(x) < \infty\}, E_2 = \{x \in E : 0 < f(x) \leqslant 1\}$, 则 $m(E_0) = 0, m(E_1) + m(E_2) = m(E)$. 对于 $\forall x \in E_1, \{f_k(x)\}$ 单调递减趋向于 1, 因为 $f_1 = f \in L(E)$, 由控制收敛定理, $\lim_{k\to\infty}\int_{E_1}[f(x)]^{1/k}\mathrm{d}x = \int_{E_1}\lim_{k\to\infty}[f(x)]^{1/k}\mathrm{d}x = m(E_1)$. 又 $\forall x \in E_2, \{f_k(x)\}$ 单调递增趋向于 1, 由 Levi 定理, $\lim_{k\to\infty}\int_{E_2}[f(x)]^{1/k}\mathrm{d}x = \int_{E_2}\lim_{k\to\infty}[f(x)]^{1/k}\mathrm{d}x = m(E_2)$, 所以我们有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E [f(x)]^{1/k}\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{E_1}[f(x)]^{1/k}\mathrm{d}x + \lim_{k\to\infty}\int_{E_2}[f(x)]^{1/k}\mathrm{d}x = m(E_1) + m(E_2) = m(E).$$

□

19. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[0,1]$ 上的非负可积函数列, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上依测度收敛于 $f(x)$. 若有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x < +\infty,$$

试证明对 $[0,1]$ 的任一可测子集 E, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 由书 158 页的注可知, $\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}|f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x = 0$. 于是, 对任意可测子集 E, 有 $0 \leqslant \left|\int_E f_n(x)\mathrm{d}x - \int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_{[0,1]}|f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \to 0 (n \to \infty)$, 所以 $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$. □

-22-. 试证明:$\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-x^2}\cos 2xt\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-t^2}, t\in\mathbb{R}$.(注：题目有误, 等式左侧应关于 x 积分)

证明. 记 $f(x,t)=\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2xt$, 则它关于 x 在 $[0,\infty)$ 上可积, 关于 t 在 $\mathbb{R}$ 上可微, 且 $\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x,t)\right| = |-2x\mathrm{e}^{-x^2}\sin 2xt| \leqslant 2x\mathrm{e}^{-x^2}\in L([0,\infty)), (x,t)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}$. 于是由定理 4.17(逐项求导),

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{[0,\infty)} f(x,t)\mathrm{d}x = \int_{[0,\infty)} -2x\mathrm{e}^{-x^2}\sin 2xt\mathrm{d}x\\&= \mathrm{e}^{-x^2}\sin 2xt\Big|_0^{+\infty} - \int_{[0,\infty)} 2t\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2xt\mathrm{d}x = -2t\int_{[0,\infty)} f(x,t)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这是可分离变量的常微分方程, 积分得 $\int_{[0,\infty)} f(x,t)\mathrm{d}x = c\cdot\mathrm{e}^{-t^2}$. 注意

$$\int_{[0,\infty)} f(x,0)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

因此 $c=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\int_{[0,\infty)}\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2xt\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-t^2}$. □

24. 设 $\{f_k(x)\},\{g_k(x)\}$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的两个可测函数列, 且有 $|f_k(x)|\leqslant g_k(x), x\in E$. 若

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \lim_{k\to\infty} g_k(x) = g(x),\\&\lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x < +\infty,\end{aligned}$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 由题 $|f(x)|\leqslant g(x)$, 因为 $g\in L(E)$, 所以 $f\in L(E)$. 又因为 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x < \infty$, 故 $g_k\in L(E) \implies f_k\in L(E)$. 易知 $\{g_k(x)+f_k(x)\},\{g_k(x)-f_k(x)\}$ 为 E 上两个非负可测函数列, 由 Fatou 引理,

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty}(g_k(x)+f_k(x))\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{k\to\infty}\int_E (g_k(x)+f_k(x))\mathrm{d}x.$$

于是

$$\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x)\mathrm{d}x + \varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x,$$

从而 $\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$.

类似地我们有

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty}(g_k(x)-f_k(x))\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{k\to\infty}\int_E (g_k(x)-f_k(x))\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_E (g(x)-f(x))\mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x)\mathrm{d}x - \overline{\lim_{k\to\infty}} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x,$$

从而 $\int_E f(x)\mathrm{d}x \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x$. 于是

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x \geqslant \underline{\lim_{k\to\infty}} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x,$$

因此 $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$. □

25. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数, 其不连续点集记为 D. 若 D 只有可列个极限点, 试证明 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数.

证明. 由 1.4(二) 的思考题 2 知若 E' 是可列集, 则 E 是可列集. 因为 D 只有可列个极限点, 故 f 的不连续点集是可列集，进而是零测集. 又 f 有界, 故 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. □

26. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界函数. 若对于每一点 $x\in\mathbb{R}$, 存在极限 $\lim_{h\to 0} f(x+h)$, 试证明 $f(x)$ 在任一区间 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的.

证明. 由教材 1.3 的例 12(ii) 知, $\{x\in\mathbb{R}: f(x)\text{在点}x\text{ 处不连续, 但右极限}f(x+0)\text{存在}\}$ 是可数集, 结合题目知 f 的不连续点可数, 于是零测, 又 f 有界, 故 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. □

27. 设 $E\subset[0,1]$, 试证明 $\chi_E(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积的充分必要条件是 $m(\bar{E}\backslash\mathring{E})=0$.

证明. 记 $\omega(x)$ 为 $\chi_E(x)$ 的振幅函数, 易知 $\{x\in[0,1]:\omega(x)>0\}=\bar{E}\backslash\mathring{E}$. 事实上 $\chi_E(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积 $\iff m(\{x\in[0,1]:\omega(x)>0\})=0 \iff m(\bar{E}\backslash\mathring{E})=0$. □

-28-. 设 $f\in\mathcal{R}([0,1])$, 试证明 $f(x^2)\in\mathcal{R}([0,1])$.

证明. 设 $x_0\in[0,1]$ 为 $f(x^2)$ 的不连续点, 则 $\exists\varepsilon>0,\forall\delta>0,\exists x\in(x_0-\delta,x_0+\delta),|f(x^2)-f(x_0^2)|>\varepsilon$, 因此 x_0^2 为 $f(x)$ 的不连续点. 因为 $y=x^2$ 在 $[0,1]$ 上是双射, 且 f 的不连续点集是零测集, 所以 $f(x^2)$ 的不连续点集也是零测集, 故 $f(x^2)\in\mathcal{R}([0,1])$. □

30. 计算下列积分:

(i) $\displaystyle\int_{x>0}\int_{y>0} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+y)(1+x^2y)}$;

解. 注意到被积函数是非负的, 故由 Tonelli 定理,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y}\left(\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2y}\right)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \frac{y^{-1/2}}{1+y}\left(\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(x\sqrt{y})}{1+x^2y}\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \frac{y^{-1/2}}{1+y}\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\cdot 2\arctan\sqrt{y}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\pi = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

□

31. 设 $E\subset\mathbb{R}$, 且 $m(E)>0$, $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非负可测函数. 若函数

$$F(x)=\int_E f(x-t)\mathrm{d}t$$

在 $\mathbb{R}$ 上可积, 试证明 $f\in L(\mathbb{R})$.

证明. 事实上, 如果 $0<m(E)<+\infty$, 则 $F\in L(\mathbb{R}) \iff f\in L(\mathbb{R})$.
必要性. 因为 $\chi_E\in L(\mathbb{R})$, 且 $F(x)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\chi_E(t)f(x-t)\mathrm{d}t$, 所以 $F\in L(\mathbb{R})$.
充分性. 由 Tonelli 定理, 我们有

$$\begin{aligned}+\infty>\int_{\mathbb{R}}F(x)\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\chi_E(t)f(x-t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}}\chi_E(t)\left(\int_{\mathbb{R}}f(x-t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=m(E)\cdot\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

于是 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{d}x<\infty \implies f\in L(\mathbb{R})$. □

32. 设 $f\in L(\mathbb{R})$, 且 $xf(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积, 令

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t.$$

若有 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=0$, 试证明 $F\in L(\mathbb{R})$.

证明. 因为 $xf(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积, 所以 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|xf(x)|\mathrm{d}x<\infty$. 由 Tonelli 定理,

$$\begin{aligned}\infty>\int_0^{\infty}|xf(x)|\mathrm{d}x&=\int_0^{\infty}x|f(x)|\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}|f(x)|\left(\int_0^x\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\infty}|f(x)|\int_0^{\infty}\chi_{[0,x]}(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)}|f(x)|\chi_{[0,x]}(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以 $f(x)\chi_{[0,x]}(t)\in L([0,\infty)\times[0,\infty))$. 由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned}\infty>\left|\int_0^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_0^{\infty}f(x)\left(\int_0^x\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}f(x)\chi_{[0,x]}(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}f(x)\chi_{[0,x]}(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\\&=\left|\int_0^{\infty}\int_t^{\infty}f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|=\left|\int_0^{\infty}\left(-\int_{-\infty}^{t}f(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_0^{\infty}F(t)\mathrm{d}t\right|,\end{aligned}$$

所以 $F\in L([0,\infty))$, 同理 $F\in L([-\infty,0))$, 从而 $F\in L(\mathbb{R})$. □

-33-. 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\cos x\arctan(nx)\mathrm{d}x$ 的值.

解. 由 $|\cos x \arctan(nx)| \leqslant \pi/2 \in L((0,\pi/2))$, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos x \arctan(nx) = \dfrac{\pi}{2}\cos x, 0 < x \leqslant \pi/2$ 及控制收敛定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \arctan(nx)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}\cos x \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$. □

34. 设 $f \in L((0,a)), g(x) = \displaystyle\int_x^a \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t (a > x > 0)$, 试证明 $g \in L((0,a))$, 且有

$$\int_0^a g(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

证明. (i) 因为我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^a \left|\int_x^a f(t)t^{-1}\mathrm{d}t\right| \mathrm{d}x \leqslant \int_0^a \left(\int_x^a |f(t)|t^{-1}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a |f(t)|t^{-1}\left(\int_0^a \chi_{(x,a)}(t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_0^a |f(t)|t^{-1}\left(\int_0^t \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^a |f(t)|\mathrm{d}t < +\infty,
\end{aligned}$$

故 $g \in L((0,a))$.

(ii) 与 (i) 中类似,

$$\int_0^a g(x)\mathrm{d}x = \int_0^a \left(\int_x^a f(t)t^{-1}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_0^a f(t)t^{-1}\left(\int_0^t \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\mathrm{d}t.$$

□

5 微分与不定积分

5.1 单调函数的可微性

(二) 单调函数的可微性

思考题 1. 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的非负函数. 若 $f\notin L([a,b])$, 试问:$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数吗?

证明. 一定没有. 反证法, 设 f 在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x): F'(x)=f(x), a\leqslant x\leqslant b$. 因为 $F'(x)$ 非负, 所以 F 在 $[a,b]$ 上递增, 从而由 Lebesgue 定理,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x\leqslant F(b)-F(a),$$

这说明 $f\in L([a,b])$, 矛盾. □

-思考题 2-. 设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $G(x)$, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $F'(x)\geqslant 0(a\leqslant x\leqslant b)$, 试证明 $h(x)=F(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数.

(提示: 考查 $F(x)G(x)-\displaystyle\int_a^x G(t)F'(t)\mathrm{d}t$, 其中 $G'(x)=g(x), x\in[a,b]$.

证明. 上述函数的导函数是 $F'(x)G(x)+F(x)G'(x)-G(x)F'(x)=h(x)$. □

-思考题 3-.Vitali 覆盖定理的结论可改为: 存在可数个 $\{I_j\}$, 使得

$$m^*\left(E\backslash\bigcup_{j\geqslant 1}I_j\right)=0.$$

证明. 由书 202 页 Vitali 覆盖定理, 存在不交的 $\{I_1,I_2,\cdots,I_{n_1}\}\subset\Gamma, m\left(E\backslash\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n_1}I_j\right)<1$. 若 $E\backslash\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n_1}I_j=\varnothing$, 则结论已经得证. 否则, 因为 $\Gamma\backslash\{I_1,\cdots,I_{n_1}\}$ 是 $E\backslash\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n_1}I_j$ 的 Vitali 覆盖, 故存在不交的 $\{I_{n_1+1},\cdots,I_{n_2}\}\subset\Gamma\backslash\{I_1,\cdots,I_{n_1}\}, m\left(E\backslash\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n_1}I_j\backslash\bigcup_{j=n_1+1}^{n_2}I_j\right)<1/2$. 反复此操作, 要么有限步内出现 $E\backslash\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n_k}I_j=\varnothing$, 结论得证; 要么可以一直继续, 得到互不相交的 $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}\subset\Gamma$, 有 $E\backslash\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n_k}I_j<1/2^k$, 所以 $m^*\left(E\backslash\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j\right)=0$. □

5.2 有界变差函数

-思考题 1-. 计算 $\displaystyle\bigvee_{-1}^{1}(x-x^3)$.

解. $\bigvee\limits_{-1}^{1}(x-x^3)=8\sqrt{3}/9$. □

-思考题 2-. 试证明 $\bigvee\limits_a^b(f)=0$ 当且仅当 $f(x)=C$(常数).

证明. 充分性. 显然.

必要性. 对任意 $x\in[a,b]$, $|f(x)-f(a)|\leqslant\bigvee\limits_a^b(f)=0 \implies f(x)\equiv f(a)$. □

思考题 3. 设 $f\in\mathrm{BV}([a,b]), g\in\mathrm{BV}([a,b])$, 试证明

$$M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$$

是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

证明. 易得 $\max\{f(x),g(x)\}=\dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$. 注意到有界变差函数的和, 差和绝对值 (这是因为 $||f(x)|-|f(y)||\leqslant|f(x)-f(y)|$) 均为有界变差函数, 故 $M(x)\in\mathrm{BV}([a,b])$. □

-思考题 4-. 设 $f\in\mathrm{BV}([a,b])$, 试证明 $|f|\in\mathrm{BV}([a,b])$, 但反之不然.

证明. 注意到 $||f(x)|-|f(y)||\leqslant|f(x)-f(y)|$, 故若 $f\in\mathrm{BV}([a,b])$, 则有 $|f|\in\mathrm{BV}([a,b])$. 反之, 例如 $D(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q},\\ -1, x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},\end{cases}$ 不是有界变差函数, 但 $|D(x)|=1$ 则是有界变差函数. □

-思考题 5-. 设 $f,g\in\mathrm{BV}([a,b])$, 试证明

$$\bigvee_a^b(fg)\leqslant\sup_{[a,b]}\{f(x)\}\bigvee_a^b(f)+\sup_{[a,b]}\{g(x)\}\bigvee_a^b(f).$$

证明. 任取分划 $\varDelta: a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n|f(x_k)g(x_k)-f(x_{k-1})g(x_{k-1})|\\
\leqslant&\sum_{k=1}^n[|f(x_k)g(x_k)-f(x_k)g(x_{k-1})|+|f(x_k)g(x_{k-1})-f(x_{k-1})g(x_{k-1})|]\\
\leqslant&\sum_{k=1}^n|f(x_k)||g(x_k)-g(x_{k-1})|+\sum_{k=1}^n|f(x_k)-f(x_{k-1})||g(x_{k-1})|\\
\leqslant&\sup_{[a,b]}\{|f(x)|\}\bigvee_a^b(g)+\sup_{[a,b]}\{|g(x)|\}\bigvee_a^b(f).
\end{aligned}$$

□

-思考题 6-. 设 $f\in\mathrm{BV}([a,b]), \varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上属于 Lip1, 试证明 $\varphi(f)\in\mathrm{BV}([a,b])$.

证明. 由题, 存在 $M>0$, 使得 $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|(-\infty<x,y<+\infty)$. 从而对 $[a,b]$ 的任一分划 $\varDelta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 我们有

$$\begin{aligned} v_\varDelta &= \sum_{i=1}^{n}|\varphi(f(x_i))-\varphi(f(x_{i-1}))| \leqslant \sum_{i=1}^{n} M|f(x_i)-f(x_{i-1})| \\ &= M\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| \leqslant M\bigvee_a^b(f). \end{aligned}$$

由此知 $\varphi(f)$ 是有界变差函数. □

-思考题 7-. 设 $f\in \mathrm{Lip1}([a,b])$, 试证明 $\bigvee_a^x(f)$ 也是.

证明. 只需注意到对 $a\leqslant x<y\leqslant b$, 有

$$\left|\bigvee_a^y(f)-\bigvee_a^x(f)\right| = \bigvee_x^y(f) = \sup_{\varDelta}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})| \leqslant \sup_{\varDelta}\sum_{k=1}^{n}|x_k-x_{k-1}| = |y-x|.$$

□

思考题 8. 试证明 $f\in \mathrm{BV}([a,b])$ 当且仅当存在 $[a,b]$ 上的递增函数 $F(x)$, 使得

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant F(x'')-F(x')\ (a\leqslant x'<x''\leqslant b).$$

证明. 必要性. 取 $F(x)=\bigvee_a^x(f)$, 则对 $a\leqslant x'<x''\leqslant b$, 我们有

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant \bigvee_{x'}^{x''}(f)=F(x'')-F(x').$$

充分性. 假定题中不等式成立, 则对 $[a,b]$ 的任一分划 $\varDelta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 我们有

$$v_\varDelta=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant \sum_{i=1}^{n}|F(x_i)-F(x_{i-1})|=F(b)-F(a).$$

由此即知 $f\in \mathrm{BV}([a,b])$. □

-思考题 9-. 设 $f\in \mathrm{BV}([a,b])$. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数, 试问:$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数吗?

解. 是. 反证, 若存在 $x_0\in(a,b)$, 使得 $|f(x_0+0)-f(x_0-0)|=\delta_0>0$, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 有 $|f(x_0+\varepsilon)-f(x_0-\varepsilon)|>\delta_0/2$. 从而 $f(x)$ 在两值

$$\max\{f(x_0-0),f(x_0+0)\}+\delta_0/3 \text{ 与 } \min\{f(x_0-0),f(x_0+0)\}-\delta_0/3$$

之间取不到中间值, 这与 $f(x)$ 具有原函数 (f 具备介值性) 矛盾. □

思考题 10. 设 $f \in \mathrm{BV}([a,b])$. 若有 $\bigvee\limits_a^b(f) = f(b) - f(a)$, 试证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增.

证明. 令 $F(x) = \bigvee\limits_a^x(f) - f(x) + f(a)$, 则 $F(a) = F(b) = 0$. 因为 $\forall a \leqslant x < y \leqslant b, F(y) - F(x) = \bigvee\limits_x^y(f) - (f(y) - f(x)) \geqslant 0$, 所以 F 是增函数, 故 $F(x) = 0, a \leqslant x \leqslant b$. 于是 $f(x) = f(a) + \bigvee\limits_a^x(f)$ 在 $[a,b]$ 递增. □

思考题 11. 设 $f_n \in \mathrm{BV}([a,b])(n \in \mathbb{N})$. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x), \sum\limits_{n=1}^{\infty}\bigvee\limits_a^x(f_n)$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 试证明 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界变差函数.

证明. 令 $p_n(x) = \dfrac{1}{2}\left(\bigvee\limits_a^x(f_n) + f_n(x)\right), q_n(x) = \dfrac{1}{2}\left(\bigvee\limits_a^x(f_n) - f_n(x)\right)$, 易得对任意 $n, p_n(x), q_n(x)$ 均为增函数. 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x), \sum\limits_{n=1}^{\infty}\bigvee\limits_a^x(f_n)$ 收敛, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n(x), \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n(x)$ 也在 $[a,b]$ 上收敛, 分别记它们的和函数为 $p(x), q(x)$, 则 $p(x), q(x)$ 也单调递增, 且 $p(x) - q(x) = f(x)$. 由 Jordan 分解定理, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in \mathrm{BV}([a,b])$. □

5.3 不定积分的微分

思考题 1. 设 $E \subset [0,1]$. 若存在 $l : 0 < l < 1$, 使得对 $[0,1]$ 中任意的子区间 $[a,b]$, 均有 $m(E \cap [a,b]) \geqslant l(b-a)$, 试证明 $m(E) = 1$.

证明. 记 $F(x) = \int_a^x \chi_E(t)\mathrm{d}t$, 由 Lebesgue 定理, $F'(x) = \chi_E(x)$ a.e. $\forall x > a$, $\dfrac{1}{x-a}\int_a^x \chi_E(t)\mathrm{d}t = \dfrac{m(E \cap [a,x])}{x-a} \geqslant l > 0$, 令 $x \to a^+$ 可得 $F'_+(a) \geqslant l$. 再根据 a 的任意性可得 $F'_+(x) \geqslant l, x \in [0,1]$, 进而 $F'(x) = \chi_E(x) \geqslant l$, a.e. $x \in [0,1]$. 因为 $0 < l < 1$, 所以我们有 $\chi_E(x) = 1$, a.e. $x \in [0,1] \implies m(E) = 1$. □

思考题 2. 对于 $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数 $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$, 试问:$[0,1]$ 中的 Lebesgue 点是什么?

解. 按定义,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h |\chi_{\mathbb{Q}}(x+t) - \chi_{\mathbb{Q}}(x)|\mathrm{d}t \xlongequal{s=x+t} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |\chi_{\mathbb{Q}}(s) - \chi_{\mathbb{Q}}(x)|\mathrm{d}s \\
=&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{[\min\{x,x+h\},\max\{x,x+h\}]\setminus\mathbb{Q}} \chi_{\mathbb{Q}}(x)\mathrm{d}s \\
=&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}m([\min\{x,x+h\},\max\{x,x+h\}]\setminus\mathbb{Q})\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x).
\end{aligned}
$$

故 $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ 在 $[0,1]$ 中的 Lebesgue 点是所有的无理数. □

5.4 绝对连续函数与微积分基本定理

-思考题 1-. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续, 且有

$$|f'(x)| \leqslant M, \text{ a.e. } x \in [a,b],$$

则

$$|f(y)-f(x)| \leqslant M|x-y|, x,y \in [a,b].$$

证明. 对 $x,y \in [a,b]$, 由微积分基本定理有

$$|f(y)-f(x)| = \left|\int_x^y f'(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_x^y |f'(t)|\mathrm{d}t\right| \leqslant M|y-x|.$$

□

-思考题 2-. 设 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上. 若有

$$|f(y)-f(x)| \leqslant M|y-x|, x,y \in [a,b],$$

则

$$|f'(x)| \leqslant M, \text{ a.e. } x \in [a,b].$$

证明. 由题 $f \in \mathrm{AC}([a,b])$, 故 $f(x)$ 几乎处处可微. 因为

$$|f(y)-f(x)| \leqslant M|y-x| \implies \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leqslant M(x,y \in [a,b]),$$

所以令 $y \to x$, 可得 $|f'(x)| \leqslant M$, a.e. $x \in [a,b]$. □

思考题 3. 设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上递增的绝对连续函数列. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 则其和函数在 $[a,b]$ 上绝对连续.

证明. 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)(a \leqslant x \leqslant b)$, 则 $S(x)$ 是递增函数. 由 Fubini 逐项微分定理可知 $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$, a.e. $x \in [a,b]$. 注意到 $f_n'(x) \geqslant 0$, a.e., 于是由 Levi 定理和微积分基本定理有

$$\int_a^b S'(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n'(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}[f_n(b)-f_n(a)] = S(b)-S(a).$$

由习题 5 的 10 题知 $S \in \mathrm{AC}([a,b])$. □

思考题 4. 设 $f \in \mathrm{BV}([0,1])$. 若对任给 $\varepsilon > 0$, $f(x)$ 在 $[\varepsilon,1]$ 上绝对连续, 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对连续.

证明. 对递减收敛于 0 的正数列 $\{\varepsilon_n\}$ 以及 $x \in (0,1]$, 可知

$$\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_{\varepsilon_n}^x f'(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}[f(x)-f(\varepsilon_n)] = f(x)-f(0).$$

这说明 $f' \in L([0,1])$, Newton-Leibniz 公式成立, 故 $f \in \mathrm{AC}([0,1])$. □

注: 条件 $f \in \mathrm{BV}([0,1])$ 不能去掉, 否则我们有

$$f_n(x) = \begin{cases} x\sin(\pi/x), & 1/n < x \leqslant 1, \\ 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1/n. \end{cases}$$

则 $f_n(x)$ 是 $[0,1]$ 上的绝对连续函数, $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛到

$$F(x) = \begin{cases} x\sin(\pi/x), & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

它不是 $[0,1]$ 上的绝对连续函数.

5.5 分部积分公式与积分中值公式

-思考题 1-. 设 $f \in L([a,b])$, 令 $g(x) = f(x)\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

证明. 记 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则由分部积分公式,

$$\int_a^b F(x)f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)F(x)\mathrm{d}x = F(b)F(b) - F(a)F(a) = F(b)^2,$$

故命题得证. □

-思考题 2-. 设 $f(x), g(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的可测函数, 且有

$$|f(x)| \leqslant M, |xg(x)| \leqslant M, 1 \leqslant x < +\infty,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)g(t)\mathrm{d}t = 0.$$

证明.

$$\left|\frac{1}{x}\int_1^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{x}\int_1^x M\cdot\frac{M}{t}\mathrm{d}t = \frac{M^2\ln x}{x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0.$$

□

5.6 $\mathbb{R}$ 上的积分换元公式

本节没有习题.

习题 5

-1-. 设 E 是 $\mathbb{R}$ 中一族 (开、闭与半开闭) 区间的并集, 试证明 E 是可测集.

证明. 记此区间族为 $\Gamma=\{I_\alpha:\alpha\in J\}$, 不妨设 $m^*(E)<+\infty$(否则可取 $E_n=E\cap[-n,n]$), 且令

$$\mathscr{A}=\{I\subset\mathbb{R}:I\text{ 是某个}I_\alpha\text{ 中的区间}\},$$

易知 $\mathscr{A}$ 是 E 的 Vitali 覆盖. 从而知存在互不相交区间列 $\{I_k\}$, 使得 $m\left(E\backslash\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_k\right)=0$. 假设 $I_k\subset I_{\alpha_k}$, 则由 $E=\left(E\backslash\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_{\alpha_k}\right)\cup\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_{\alpha_k}\right)$ 可知 E 可测 (等式右侧两集合均可测). □

2. 设 $\{x_n\}\subset[a,b]$, 试作 $[a,b]$ 上的递增函数, 其不连续点恰为 $\{x_n\}$.

证明. 令

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & a\leqslant x<x_n\\ \dfrac{1}{2^n}, & x_n\leqslant x\leqslant b\end{cases},n=1,2,\cdots$$

则 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增, 且在 x_n 处不连续. 取 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$, 则易知 $f(x)$ 递增, 仅在 $\{x_n\}$ 不连续. □

3. 设 $f(x)$ 是 (a,b) 上的递增函数,$E\subset(a,b)$. 若对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $(a_i,b_i)\subset(a,b)(i=1,2,\cdots)$, 使得

$$\bigcup_i(a_i,b_i)\supset E,\ \sum_i[f(b_i)-f(a_i)]<\varepsilon,$$

试证明

$$f'(x)=0,\ \text{ a.e. } x\in E.$$

证明. 因为 f 递增, 所以 $f'\geqslant 0$. 由 Lebesgue 定理, 我们有

$$\int_E f'(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{\bigcup\limits_{k\geqslant 1}(a_k,b_k)}f'(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k\geqslant 1}\int_{a_k}^{b_k}f'(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k\geqslant 1}[f(b_k)-f(a_k)]<\varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知 $\displaystyle\int_E f'(x)\mathrm{d}x=0$, 从而即得所证. □

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上是有界变差函数, 试证明函数

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,F(0)=0$$

是 $[0,a]$ 上的有界变差函数.

证明. 按照 Jordan 分解定理, 我们只需证明, 若 f 是增函数时 F 也是增函数. 为此, 令 $0 \leqslant x < y \leqslant a$, 我们有

$$F(y)-F(x)=\frac{1}{y}\int_x^y f(t)\mathrm{d}t+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{(y-x)f(x)}{y}+xf(x)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)=0.$$

由此即得所证. □

-5-. 设 $\{f_k(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数列, 且有

$$\bigvee_a^b(f_k) \leqslant M(k=1,2,\cdots),$$
$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x), x\in[a,b],$$

试证明 $f\in \mathrm{BV}([a,b])$, 且满足 $\bigvee_a^b(f)\leqslant M$.

证明. 对 $[a,b]$ 的任一分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 我们有

$$\sum_{i=1}^n |f_k(x_i)-f_k(x_{i-1})| \leqslant \bigvee_a^b(f_k) \leqslant M(n\in\mathbb{N}).$$

令 $k\to\infty$, 则由题设知

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^n |f_k(x_i)-f_k(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})| \leqslant M(n\in\mathbb{N}).$$

从而可得 $\bigvee_a^b(f)\leqslant M$. □

6. 设 $f\in \mathrm{BV}([a,b])$, 且点 $x_0\in[a,b]$ 是 $f(x)$ 的连续点, 试证明 $\bigvee_a^x(f)$ 在点 x_0 处连续.

证明. 事实上, $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的连续点 $\iff$ $x=x_0$ 是 $\bigvee_a^x(f)$ 的连续点.

必要性. 因为对 $a\leqslant x_0<x\leqslant b$, 有

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \bigvee_{x_0}^x(f) = \bigvee_a^x(f)-\bigvee_a^{x_0}(f).$$

所以当 $\bigvee_a^x(f)$ 在 $x=x_0$ 处连续时, $f(x)$ 也在 $x=x_0$ 处连续.

充分性. 设 $x=x_0\in[a,b)$ 是 $f(x)$ 的连续点, 即对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon/2, x\in[x_0,x_0+\delta)\subset[a,b].$$

作 $[x_0, x_0+\delta]$ 的分划 $\varDelta: x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x_0+\delta$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2} > \bigvee_{x_0}^{x_0+\delta}(f).$$

由于 $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant \bigvee_{x_1}^{x_0+\delta}(f)$, $\displaystyle\bigvee_{x_0}^{x_0+\delta}(f) = \bigvee_{x_0}^{x_1}(f) + \bigvee_{x_1}^{x_0+\delta}(f)$, 故

$$\begin{aligned}\bigvee_{x_0}^{x_1}(f) &= \bigvee_{x_0}^{x_0+\delta}(f) - \bigvee_{x_1}^{x_0+\delta}(f) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2} - \sum_{i=2}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= |f(x_1) - f(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

从而知 $\displaystyle\bigvee_{x_0}^{x}(f) \leqslant \bigvee_{x_0}^{x_1}(f) < \varepsilon(x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$. 这说明 $\displaystyle\bigvee_{a}^{x}(f)$ 在 $x = x_0$ 处是右连续的. 同理可证 $\displaystyle\bigvee_{a}^{x}(f)$ 在 $x = x_0 (a < x_0 \leqslant b)$ 处左连续. 于是命题得证. □

-7-. 设函数 $f: [a,b] \to [c,d]$ 是连续函数, 且对任意的 $y \in [c,d]$, 点集 $f^{-1}(\{y\})$ 至多有 10 个点, 试证明

$$\bigvee_{a}^{b}(f) \leqslant 10(d-c).$$

证明. 对 $[a,b]$ 的任一分划 $\varDelta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 记 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, J_i 表示以 $f(x_{i-1}), f(x_i)$ 为端点的区间, 则 $f(I_i)$ 仍是一个区间, 且有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{f(x_{i-1})}^{f(x_i)} 1\mathrm{d}y \right| = \sum_{i=1}^{n} \int_c^d \chi_{J_i}(y)\mathrm{d}y \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_c^d \chi_{f(I_i)}(y)\mathrm{d}y = \int_c^d \sum_{i=1}^{n} \chi_{f(I_i)}(y)\mathrm{d}y \leqslant \int_c^d 10\mathrm{d}y = 10(d-c).\end{aligned}$$

所以 $\displaystyle\bigvee_{a}^{b}(f) \leqslant 10(d-c)$. □

8. 设 $f \in L([0,1])$, $g(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的递增函数. 若对任意的 $[a,b] \subset [0,1]$, 有

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right|^2 \leqslant (g(b) - g(a))(b-a),$$

试证明 $f^2(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可积函数.

证明. 依题设知, 对任意的 $x, x+\Delta x \in [0,1]$, 均有

$$\left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant [g(x+\Delta x)-g(x)]\Delta x, \Delta x>0,$$
$$\left|\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \frac{[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}, \Delta x>0.$$

令 $\Delta x \to 0$, 即得 $|f(x)|^2 \leqslant g'(x)$, a.e. $x\in[0,1]$. 由 Lebesgue 定理知结论成立. □

9. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负绝对连续函数, 试证明 $f^p(x)(p>1)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

证明. 显然 f 在 $[a,b]$ 有界, 故设 $|f(x)|\leqslant M(a\leqslant x\leqslant b)$. 对 $\xi>\eta>0$, 由 Lagrange 微分中值定理, 我们有 $\xi^p-\eta^p=p[\eta+\theta(\xi-\eta)]^{p-1}(\xi-\eta), 0<\theta<1$. 所以对 $x,y\in[a,b]$, 得到

$$|f^p(y)-f^p(x)|=p|f(x)+\theta(f(y)-f(x))||f(y)-f(x)|\leqslant p(2M)^{p-1}|f(y)-f(x)|.$$

所以 $f^p(x)$ 满足 Lipschitz 条件, 于是 $f^p(x)\in \mathrm{AC}([a,b])$. □

10. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增, 且有

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a),$$

试证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

证明. 考查函数 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t-[f(x)-f(a)]$, 易知 $F(a)=F(b)=0$. 又因当 $a\leqslant x<y\leqslant b$ 时, 由 Lebesgue 定理有

$$F(y)-F(x)=\int_x^y f'(t)\mathrm{d}t-[f(y)-f(x)]\leqslant 0,$$

所以 $F(t)$ 是递减函数. 从而知 $F(x)\equiv 0$, 这说明

$$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t-[f(x)-f(a)]=0, f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,$$

由微积分基本定理的推论即得所证. □

-11-. 设 $f\in \mathrm{BV}([a,b])$. 若有

$$\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x=\bigvee_a^b(f),$$

试证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

证明. 令 $F(x)=\displaystyle\int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t-\bigvee_a^x(f)$, 则 $F(y)-F(x)=\displaystyle\int_x^y |f'(t)|\mathrm{d}t-\bigvee_x^y(f)\leqslant 0, \forall a\leqslant x<$

$y \leqslant b$, 故 $F(x)$ 是 $[a, b]$ 上的减函数. 由 $F(a) = F(b) = 0$ 可知 $F(x) \equiv 0$, 即

$$\bigvee_a^x(f) \equiv \int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t.$$

所以 $\bigvee\limits_a^x(f)$ 绝对连续. 按定义, 对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $[a, b]$ 中任意有限个互不相交的开区间 $(x_i, y_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^n |y_i - x_i| < \delta$, 就有 $\sum\limits_{i=1}^n \left|\bigvee\limits_a^{y_i}(f) - \bigvee\limits_a^{x_i}(f)\right| = \sum\limits_{i=1}^n \left|\bigvee\limits_{x_i}^{y_i}(f)\right| < \varepsilon$, 则

$$\sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| \leqslant \sum_{i=1}^n \left|\bigvee_{x_i}^{y_i}(f)\right| < \varepsilon,$$

即 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上绝对连续. □

-12-. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上有界的递增函数, 且 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微, 记

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A, \lim_{x\to+\infty} f(x) = B,$$

试证明

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\mathrm{d}x = B - A.$$

证明. 记 $f_n'(x) = f'(x)\chi_{[-n,n]}(x)$, 由 $f(x)$ 递增知 $\int_{\mathbb{R}} f_n'(x)\mathrm{d}x \leqslant f(n) - f(-n)$, 故 $f_n'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积. 又因为 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微, 所以 (见 Rudin 的 *Real and Complex Analysis*, p149, Theorem 7.21)

$$\int_{\mathbb{R}} f_n'(x)\mathrm{d}x = f(n) - f(-n).$$

由 $f(x)$ 递增知 $f'(x) \geqslant 0$, a.e. $x \in \mathbb{R}$, 于是 $f_n'(x)$ 是非负渐升可积函数列, 且极限为 $f'(x)$. 故由 Levi 定理,

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n'(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n'(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}(f(n) - f(-n)) = B - A.$$

□

-13-. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的可微函数, 且 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 都是 $\mathbb{R}$ 上的可积函数, 试证明

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\mathrm{d}x = 0.$$

证明. 由题, 存在

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{B\to+\infty\\A\to-\infty}}\int_A^B f'(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{B\to+\infty\\A\to-\infty}}[f(B) - f(A)].$$

令 $\lim\limits_{B\to+\infty} f(B)=l_1$, $\lim\limits_{A\to-\infty} f(A)=l_2$, 则由 $f(x)$ 可积得 $l_1=0=l_2$. 这说明 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f'(x)\mathrm{d}x=0$. □

14. 假设 $f(x,y)$ 是定义在 $[a,b]\times[c,d]$ 上的二元函数, 且存在 $y_0\in(c,d)$, 使得 $f(x,y_0)$ 在 $[a,b]$ 上是可积的, 又对于每一个 $x\in[a,b]$, $f(x,y)$ 是关于 y 在 $[c,d]$ 上的绝对连续函数, $f'_y(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上是可积的, 试证明函数

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

是定义在 $[c,d]$ 上的绝对连续函数, 且对几乎处处的 $y\in[c,d]$, 有

$$F'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)\mathrm{d}x.$$

证明. 由题, $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 只要 $[c,d]$ 中任意有限个互不相交的开区间 $\{(z_i,y_i)\}_{i=1}^n$ 满足 $\displaystyle\sum_{i=1}^n|y_i-z_i|<\delta$, 就有 $\displaystyle\sum_{i=1}^n|F(y_i)-F(z_i)|=\sum_{i=1}^n\left|\int_a^b[f(x,y_i)-f(x,z_i)]\mathrm{d}x\right|\leqslant\sum_{i=1}^n\int_a^b|f(x,y_i)-f(x,z_i)|\mathrm{d}x=\int_a^b\sum_{i=1}^n|f(x,y_i)-f(x,z_i)|\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon(b-a)$, 故 $F(y)\in\mathrm{AC}([c,d])$. 又由微积分基本定理, $f(y)-f(y_0)=\displaystyle\int_{y_0}^y f'_t(x,t)\mathrm{d}t$. 又因为 $f'_y(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上可积, $f(x,y_0)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 由 Fubini 定理可得

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^y F'(t)\mathrm{d}t=F(y)-F(y_0)&=\int_a^b[f(x,y)-f(x,y_0)]\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\int_{y_0}^y f'_t(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_{y_0}^y\mathrm{d}tg\int_a^b f'_t(x,t)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

从而有 $F'(y)=\displaystyle\int_a^b f'_y(x,y)\mathrm{d}x$, a.e. $y\in[c,d]$. □

-16-. 试举例说明绝对连续函数是几乎处处可微的这个结论一般是不能改进的.

证明. 考虑 $f(x)=|x|$, 它在 $\mathbb{R}$ 上绝对连续, 但是在 0 处不可微. □

17. 设 $\{g_k(x)\}$ 是在 $[a,b]$ 上的绝对连续函数列, 又有 $|g'_k(x)|\leqslant F(x)$ a.e.$(k=1,2,\cdots)$, 且 $F\in L([a,b])$. 若 $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x)=g(x)(a\leqslant x\leqslant b)$, $\lim\limits_{k\to\infty} g'_k(x)=f(x)$, a.e. $x\in[a,b]$, 试证明

$$g'(x)=f(x),\ \text{a.e. } x\in[a,b].$$

证明. 由题设及微积分基本定理, $\displaystyle\int_a^x g'_k(t)\mathrm{d}t=g_k(x)-g_k(a)(a\leqslant x\leqslant b)$, 故根据控制收敛定理可得 $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\lim_{k\to\infty}\int_a^x g'_k(t)\mathrm{d}t=g(x)-g(a)$. 由教材例 2 结果知 $f\in L([a,b])$, 因此, 由微积分基本定理可得 $f(x)=g'(x)$, a.e. $x\in[a,b]$. □

18. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续严格递增函数, $g(y)$ 在 $[f(a),f(b)]$ 上绝对连续, 试证明 $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

证明. 由 $g\in \mathrm{AC}([f(a),f(b)])$ 可知, 对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 当互不相交的区间 $\{(c_i,d_i)\}_{i=1}^n$ 满足 $\{(c_i,d_i)\}\subset[f(a),f(b)]$ 且 $\sum\limits_{i=1}^n(d_i-c_i)<\eta$ 时, 有 $\sum\limits_{i=1}^n|g(d_i)-g(c_i)|<\varepsilon$. 因为 $f\in\mathrm{AC}([a,b])$, 所以存在 $\delta>0$, 当 $[a,b]$ 中互不相交开区间 $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^n(y_i-x_i)<\delta$ 时, 有 $\sum\limits_{i=1}^n|f(y_i)-f(x_i)|<\eta$. 注意到 $f(x)$ 的严格递增性, 易知区间族 $\{(f(x_i),f(y_i))\}$ 也是互不相交的, 从而当 $[a,b]$ 中互不相交区间族满足 $\sum\limits_{i=1}^n(y_i-x_i)<\delta$ 时, 可得 $\sum\limits_{i=1}^n|g[f(y_i)]-g[f(x_i)]|<\varepsilon$. □

19. 设 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数,$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上满足 Lipschitz 条件, 试证明 $f(g(x))$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

证明. 依题设知存在 $M>0$, 使得 $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|(x,y\in\mathbb{R})$. 对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $[a,b]$ 中互不相交开区间族满足 $\sum\limits_{i=1}^n(y_i-x_i)<\delta$ 时, 有 $\sum\limits_{i=1}^n|g(y_i)-g(x_i)|<\varepsilon/M$. 从而可得

$$\sum_{i=1}^n|f[g(y_i)]-f[g(x_i)]|\leqslant M\sum_{i=1}^n|g(y_i)-g(x_i)|<\varepsilon.$$

由此结论得证. □

注: 一般地, 两个绝对连续函数的复合函数不一定绝对连续, 例如 $f(y)=y^{1/3}, y\in[-1,1]$ 以及

$$g(x)=\begin{cases}x^3\cos^3(\pi/x), & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

易知 $f(y)$ 是 $[-1,1]$ 上的绝对连续函数, $g(x)$ 是 $[0,1]$ 的绝对连续函数. 然而, 我们有

$$F(x)=f[g(x)]=\begin{cases}x\cos(\pi/x), & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad ,\bigvee_0^1(F)=+\infty.$$

上述 18 和 19 题都添加了一些条件, 使得绝对连续函数的复合函数绝对连续.

6 L^p 空间

6.1 L^p 空间的定义与不等式

-思考题 1-. 设 $0 < m(E) < +\infty$, 且有数列 $\{p_k\}$:

$$1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_k < \cdots \to \infty (k \to \infty).$$

若 $f \in L^{p_k}(E)(k = 1, 2, \cdots)$, 且 $\sup\limits_{k \geqslant 1}\{\|f\|_{p_k}\} < +\infty$, 则 $f \in L^\infty(E)$.

证明. 对任意 $p > 1$, 都有 $p < \lim\limits_{k\to\infty} p_k$, 因此 $\exists k, p < p_k$, 故由教材 251 页例 2 知 $f \in L^p(E)$. 再由书 249 页知

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \lim_{k\to\infty} \|f\|_{p_k}.$$

□

思考题 3. 设 $m(E) < +\infty$, $f(x)$ 是 E 上可测函数, $0 < p_0 < +\infty$, 则

$$\lim_{p \nearrow p_0} \int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x = \int_E |f(x)|^{p_0} \mathrm{d}x.$$

证明. 对任意递增趋于 p_0 的正数列 $\{p_n\}$, 记 $g_n(x) = |f(x)|^{p_n}$, 则 $\{g_n\}$ 是非负可测渐升列, 且 $g_n \to g(x \in E)$. 由 Levi 定理 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E g_n(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x$, 由 Heine 原理知结论成立. □

思考题 6. 设 $f \in L^2((0, +\infty))$ 且 $f(x) \geqslant 0 (x \in (0, +\infty))$, 令 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 试证明

$$F(x) = o(\sqrt{x})\ (x \to 0).$$

证明. 由 Schwarz 不等式, 我们有

$$\frac{F(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x 1^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}} \leqslant \left(\int_0^x |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \to 0 (x \to 0),$$

此即 $F(x) = o(\sqrt{x})\ (x \to 0)$. □

注: 我们还有结论 $F(x) = o(\sqrt{x})\ (x \to +\infty)$, 由两个估计 (仍使用 Schwarz 不等式) 得到:

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t = O(x^{1/4}), \int_{\sqrt{x}}^x f(t)\mathrm{d}t = o(\sqrt{x}).$$

-思考题 7-. 设 $f \in L^2([0, 1])$, 试证明存在 $[0, 1]$ 上递增函数 $g(x)$, 使得对任意的 $[a, b] \subset [0, 1]$, 有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|^2 \leqslant (g(b) - g(a))(b - a).$$

证明. 令 $g(x)=\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t(0\leqslant x\leqslant 1)$, 我们有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|^2\leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=[g(b)-g(a)](b-a).$$

显然 g 递增. □

思考题 8. 设 $f\in L^2([0,1])$, 且 $\|f\|_2\neq 0$, 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, x\in[0,1]$, 试证明 $\|F\|_2<\|f\|_2$.

证明. 由 Schwarz 不等式,

$$\|F\|_2^2=\int_0^1\left|\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1\left(\int_0^x|f(t)|^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x\|f\|_2^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\|f\|_2^2<\|f\|_2^2.$$

□

-思考题 9-. 设 $1\leqslant p\leqslant+\infty$. 若 $f_k\in L^p(E)(k=1,2,\cdots)$, 且级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}f_k(x)$$

在 E 上几乎处处收敛, 则

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}f_k\right\|_p\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_p.$$

证明. 由 Fatou 引理,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}f_k\right\|_p&=\left(\int_E\left|\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}=\left(\int_E\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\\&\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\left(\int_E\left|\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\|f_k\|_p=\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_p.\end{aligned}$$

□

-思考题 10-. 设 $f\in L^p(E)(p\geqslant 1), e\subset E$ 是可测集, 则

$$\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_e|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\left(\int_{E\setminus e}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

证明. 作函数 $g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in e,\\ 0, & x\in E\setminus e,\end{cases}\quad h(x)=\begin{cases}0, & x\in e,\\ f(x), & x\in E\setminus e,\end{cases}$ 则 $f(x)=g(x)+h(x)(x\in$

E). 从而由 Minkowski 不等式,

$$\begin{aligned}
&\left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} = \left(\int_E |g(x)+h(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \\
\leqslant &\left(\int_E |g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_E |h(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} = \left(\int_e |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_{E\setminus e} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

□

6.2 L^p 空间的结构

(一)$L^p(E)$ 是完备的距离空间

思考题 1. 若 $f_k \in L^p(E)(k=1,2,\cdots), p \geqslant 1$, 且满足

$$\|f_{k+1}-f_k\|_p \leqslant 1/2^k (k=1,2,\cdots),$$

试证明存在 $f \in L^p(E)$, 且有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in E.$$

证明. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 令 $E_k(\varepsilon) = E[|f_{k+1}(x) - f_k(x)| \geqslant \varepsilon]$, 则

$$\begin{aligned}
\varepsilon(m(E_k(\varepsilon)))^{1/p} &\leqslant \left(\int_{E_k(\varepsilon)} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\int_E |f_{k+1}(x) - f_k(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} = \|f_{k+1}-f_k\|_p \leqslant 1/2^k.
\end{aligned}$$

这说明 $\lim\limits_{k\to\infty} m(E_k(\varepsilon)) = 0$, 即 $\{f_k\}$ 在 E 上是依测度 Cauchy 列, 由定理 3.16, 存在 E 上几乎处处有限的可测函数 $f(x)$, 使得 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$. 再由 Riesz 定理, 存在 $\{f_k(x)\}$ 的子列 $\{f_{k_i}(x)\}$, 使得

$$\lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in E.$$

由 Fatou 引理,

$$\int_E |f_k(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x = \int_E \lim_{i\to\infty} |f_k(x) - f_{k_i}(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{i\to\infty} \int_E |f_k(x) - f_{k_i}(x)|^p \mathrm{d}x,$$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty} \displaystyle\int_E |f_k(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x = 0$. 这说明

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_p = 0.$$

最后, 由 $\|f\|_p \leqslant \|f-f_k\|_p + \|f_k\|_p$ 可知 $f \in L^p(E)$. □

思考题 2. 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上可测函数列, $F \in L^p(E)(p \geqslant 1)$. 若有

$$|f_k(x)| \leqslant F(x)(k=1,2,\cdots),$$
$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in E,$$

试证明 $\|f_k - f\|_p \to 0(k\to\infty)$.

证明. 因为 $p \geqslant 1$, 所以 $|f_k(x)|^p \leqslant F^p(x)$, 且 $\lim\limits_{k\to\infty} |f_k(x)|^p = |f(x)|^p$, a.e. $x \in E$. 由控制收敛定理, $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E |f_k(x)|^p \mathrm{d}x = \int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x \implies \lim\limits_{k\to\infty} \|f_k\|_p = \|f\|_p \implies \|f_k - f\|_p \to 0(k\to\infty)$. □

-思考题 6-. 设 $f \in L^p([a,b]), f_k \in L^p([a,b])(k\in\mathbb{N}, p \geqslant 1)$. 若有

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_p = 0,$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^x f_k(t)\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, a \leqslant x \leqslant b.$$

证明. 注意不等式 $(p>1)$

$$\int_a^x |f_k(t)-f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f_k(t)-f(t)|\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b |f_k(t)-f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \cdot (b-a)^{\frac{p}{p-1}}.$$

$p=1$ 时可以验证结论也成立. □

(二)$L^p(E)(1 \leqslant p < +\infty)$ 是可分空间

思考题 1. 设 $1<p<+\infty, f_n \in L^p(\mathbb{R}), \|f_n\|_p \leqslant M(n=1,2,\cdots), f \in L^p(\mathbb{R})$, 且有

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t, x \in \mathbb{R},$$

则对任意的 $g \in L^q(\mathbb{R}), 1/p+1/q=1$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 类似推论 4.22, 若 $h(x)$ 是阶梯函数, 则有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)h(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)h(x)\mathrm{d}x.$$

现在对 $g \in L^q(\mathbb{R})$ 以及 $\varepsilon > 0$, 作阶梯函数 $h(x)$, 使得

$$\|g-h\|_q = \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)-h(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q} < \frac{\varepsilon}{3M},$$

并考查

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant \int_{\mathbb{R}}|f_n(x)||g(x)-h(x)|\mathrm{d}x+\left|\int_{\mathbb{R}}[f_n(x)h(x)-f(x)h(x)]\mathrm{d}x\right|+\int_{\mathbb{R}}|f(x)||h(x)-g(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant \|f_n\|_p\|g-h\|_q+\left|\int_{\mathbb{R}}[f_n(x)h(x)-f(x)h(x)]\mathrm{d}x\right|+\|f\|_p\|g-h\|_q\\&<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon.\end{aligned}$$

由此易知结论成立. □

-思考题 2-.$L^\infty((0,1))$ 是不可分的.(考查函数族 $f_t(x)=\chi_{(0,t)}(x),0<t<1.$)

证明. 设 $\Lambda=\{f_t:f_t(x)=\chi_{(0,t)}(x),0<t<1\}$, 显然这是不可数集, 且对任意的 $0<t_1<t_2<1$, 有 $\|f_{t_1}-f_{t_2}\|_\infty=1$. 因此, 对任意可数的 $\Gamma\subset L^\infty((0,1))$ 中的每一个函数 g, 或者与 Λ 中每个 f_t, 都有 $\|f_t-g\|>1/2$, 或者与其中确定的某个 f_{t_0} 满足 $\|f_{t_0}-g\|\leqslant 1/2$, 而对剩余所有 f_t 有 $\|f_t-g\|>1/2$, 这说明 Γ 不是稠密的. 所以 $L^\infty((0,1))$ 不可分.
(换句话说, 对任意 $L^\infty((0,1))$ 的稠密子集 Γ_0, 由于 Λ 中任意两个函数的 “距离” 都大于 1, 所以总能建立 Λ 到 Γ_0 的单射, 因此 Γ_0 不可数). □

6.3 L^2 内积空间

(一) 内积, 正交系

思考题 1. 设 $f,g\in L^2(E)$, 则有 (平行四边形公式)

$$\|f+g\|_2^2+\|f-g\|_2^2=2(\|f\|_2^2+\|g\|_2^2).$$

证明. 我们有 $\displaystyle\int_E[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x+\int_E[f(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x=2\left(\int_E f^2(x)\mathrm{d}x+\int_E g^2(x)\mathrm{d}x\right).$ □

-思考题 2-. 设 $\|f_n-f\|_2\to 0,\|g_n-g\|_2\to 0(n\to\infty)$, 则 $|\langle f_n,g_n\rangle-\langle f,g\rangle|\to 0$.

证明. 由题 $\|g_n\|\to\|g\|$, 所以

$$|\langle f_n,g_n\rangle-\langle f,g\rangle|=|\langle f_n-f,g_n\rangle+\langle g_n-g,f\rangle|\leqslant\|f_n-f\|_2\|g_n\|_2+\|g_n-g\|_2\|f\|_2,$$

于是 $|\langle f_n,g_n\rangle-\langle f,g\rangle|\to 0(n\to\infty)$. □

-思考题 3-. 设 $\|f\|_2=\|g\|_2$, 则

$$\langle f+g,f-g\rangle=0.$$

证明. 我们有 $\langle f+g,f-g\rangle=\|f\|_2^2-\|g\|_2^2+\langle g,f\rangle-\langle f,g\rangle=0.$ □

思考题 4. 设 $\|f_n\|_2 \to \|f\|_2, \langle f_n, f\rangle \to \|f\|_2^2 (n\to\infty)$, 则

$$\|f_n - f\|_2 \to 0(n\to\infty).$$

证明. 我们有 $\|f_n - f\|_2^2 = \|f_n\|_2^2 + \|f\|_2^2 - 2\langle f_n, f\rangle$. □

(二) 广义 Fourier 级数

-思考题 1-.$\{\sin nx\}$ 是 $L^2([0,\pi])$ 中的完全正交系.

证明. 显然 $\{\sin nx\}$ 是 $L^2([0,\pi])$ 中的正交系. 此外, 设 $f\in L^2([0,\pi])$, 且有 $\int_0^\pi f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0$, 则作 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的奇延拓:$f^*(x) = f(x)(0<x\leqslant\pi), f^*(x) = -f(-x)(-\pi\leqslant x<0)$. 显然 $\int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0(n=0,1,2,\cdots)$, 且

$$\int_{-\pi}^{0} f^*(x)\sin nx\mathrm{d}x \xlongequal{x=-t} \int_0^\pi f(t)\sin nt\mathrm{d}t = 0(n\in\mathbb{N}).$$

这说明 $\int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0$. 从而 $f^*(x) = 0$, a.e. $x\in[-\pi,\pi]$. 由此即得所证. □

-思考题 2-. 设 $f\in L^1([-\pi,\pi]), \{\varphi_n(x)\}$ 是 $(-\pi,\pi]$ 上的三角函数系. 若有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x = 0(n=1,2,\cdots)$$

则

$$f(x) = 0, \text{a.e. } x\in[-\pi,\pi].$$

证明. 由题, 对三角多项式 $Q(x)$, 有 $\langle f, Q\rangle = 0$. 而对 $g\in C([-\pi,\pi])$, 存在三角多项式列 $\{Q_n(x)\}$, 它在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛到 $g(x)$, 故有

$$0 = \lim_{n\to\infty}\langle f, Q_n\rangle = \langle f, g\rangle.$$

又对 $[-\pi,\pi]$ 中的任一正测集 E, 存在 $g_n\in C([-\pi,\pi]), |g_n(x)|\leqslant 1$, 使得 $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \chi_E(x)$. 从而根据控制收敛定理, 可得 $\langle f, \chi_E\rangle = 0$. 由此立即推出结论成立. □

思考题 4. 设 $\{\varphi_k(x)\}$ 是 $L^2(E)$ 中的标准正交系. 若 $f\in L^2(E)$, 则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x = 0.$$

证明. 记 $C_k = \int_E f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x(k\in\mathbb{N})$, 注意 $\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \leqslant \|f\|_2^2 < +\infty$. □

思考题 5. 设 $\{\varphi_k\}\subset L^2([a,b])$ 是标准完全正交系, $f\in L^2([a,b]), f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$, 其中

$c_k = \langle f, \varphi_k \rangle$, 则对 $[a, b]$ 中的可测集 E, 有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_E \varphi_k(x)\mathrm{d}x.$$

证明. 注意我们有等式

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\chi_E(x)\mathrm{d}x = \langle f, \chi_E \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \langle \chi_E, \varphi_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \langle \chi_E, \varphi_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_E \varphi_k(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

于是命题得证. □

6.4 L^p 空间的范数公式

本节没有习题.

6.5 卷积

本节没有习题.

6.6 弱收敛

本节没有习题.

习题 6

1. 设 $f \in L^\infty(E), w(x) > 0$, 且 $\displaystyle\int_E w(x)\mathrm{d}x = 1$, 试证明

$$\lim_{p\to\infty} \left(\int_E |f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x \right)^{1/p} = \|f\|_\infty.$$

证明. 记左侧极限值为 I. 一方面, 易得 $I \leqslant \displaystyle\lim_{p\to\infty} \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} = \|f\|_\infty$. 另一方面, 对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $e \subset E, m(e) > 0$, 使得 $|f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon, x \in e$, 从而

$$\left(\int_E |f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x \right)^{1/p} \geqslant \left(\int_e |f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x \right)^{1/p} \geqslant (\|f\|_\infty - \varepsilon) \left(\int_e w(x)\mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

令 $p \to +\infty$ 得 $I \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon$. 于是命题得证. □

-4-. 设 $f \in L^2([0,1])$, 令

$$g(x) = \int_0^1 \frac{f(t)}{|x-t|^{1/2}}\mathrm{d}t, 0 < x < 1,$$

试证明
$$\left(\int_0^1 g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant 2\sqrt{2}\left(\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

证明. 令 $0 < x < 1$, 由 Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned}
&|g(x)|^2 \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{|x-t|^{1/2}} \int_0^1 \frac{|f(t)|^2\mathrm{d}t}{|x-t|^{1/2}} \leqslant 2\sqrt{2}\int_0^1 \frac{|f(t)|^2\mathrm{d}t}{|x-t|^{1/2}} \\
\Longrightarrow &\int_0^1 |g(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant 2\sqrt{2}\int_0^1 \left(\int_0^1 |x-t|^{-1/2} f^2(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \leqslant 8\int_0^1 |f(t)|^2\mathrm{d}t \\
\Longrightarrow &\|g\|_2 \leqslant 2\sqrt{2}\|f\|_2.
\end{aligned}$$

此即待证不等式. □

-5-. 试证明下列两个不等式是不能同时成立的:

(i) $\displaystyle\int_0^\pi (f(x) - \sin x)^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{9}$;

(ii) $\displaystyle\int_0^\pi (f(x) - \cos x)^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{9}$.

证明. 反证, 假定两个不等式同时成立, 则

$$\begin{aligned}
\pi &= \int_0^\pi (1 - \sin 2x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi (\cos x - \sin x)^2\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi |f(x) + \cos x - f(x) - \sin x|^2\mathrm{d}x \\
&\leqslant \left(\int_0^\pi |f(x) + \cos x|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} + \left(\int_0^\pi |f(x) + \sin x|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant 1.
\end{aligned}$$

这导致矛盾. □

6. 设 $f \in L^p(\mathbb{R})(p > 1), 1/p + 1/p' = 1$, 令

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t, x \in \mathbb{R},$$

试证明 $|F(x+h) - F(x)| = o\left(|h|^{1/p'}\right), h \to 0$.

证明. 对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\int_E |f(x)|^p\mathrm{d}x < \varepsilon^p (E \subset \mathbb{R}, m(E) < \delta).$$

从而当 $0<h<\delta$ 时, 因为 $1/p+1/p'=1$, 故有

$$|F(x+h)-F(x)|=\left|\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant h^{1/p'}\cdot\left(\int_x^{x+h}|f(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}<\varepsilon h^{1/p'}.$$

所以 $\lim\limits_{h\to 0}(|F(x+h)-F(x)|)/h^{1/p'}=0$. □

7. 设 $m(E_k)>0(k=1,2,\cdots)$, 且 $m(E_k)\to 0(k\to\infty)$, 又

$$g_k(x)=\frac{\chi_{E_k}(x)}{m(E_k)^{1/q}}, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, p>1,$$

试证明对 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} g_k(x)f(x)\mathrm{d}x=0.$$

证明. 由 Hölder 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|g_k(x)f(x)|\mathrm{d}x&=\frac{1}{m(E_k)^{1/q}}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{m(E_k)^{1/q}}\cdot m(E_k)^{1/q}\left(\int_{E_k}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\\&=\left(\int_{E_k}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\to 0\quad \text{as } m(E_k)\to 0(k\to\infty).\end{aligned}$$

□

10. 设 $f\in L^p(\mathbb{R})(1\leqslant p<+\infty)$, 令 $f_h(x)=f(x+h)$. 若 $r>0, s>0$, 且 $r+s=p$, 试证明

$$\lim_{|h|\to\infty}\|f_h^r f^s\|_1=0.$$

证明. 首先由 $f_h^r\in L^{p/r}(\mathbb{R}), f^s\in L^{p/s}(\mathbb{R})(r/p+s/p=1)$ 可知 $f_h^r f^s\in L^1(\mathbb{R})$. 其次, 对任给 $\varepsilon>0$, 取 N, 记 $E=[-N,N]$, 使得 $\int_{E^c}|f^p(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$. 因为对 $x\in E$, 当 $|h|>2N$ 时,$x+h\notin E$, 所以

$$\begin{aligned}\|f_h^r f^s\|_1&=\int_E|f_h^r(x)f^s(x)|\mathrm{d}x+\int_{E^c}|f_h^r(x)f^s(x)|\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\left(\int_E|f_h(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{r/p}\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{s/p}\\&+\left(\int_{E^c}|f_h(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{r/p}\left(\int_{E^c}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{s/p}\\&\leqslant\varepsilon^{r/p}\|f\|_p^s+\varepsilon^{s/p}\|f\|_p^r.\end{aligned}$$

由此即得所证. □

11. 设 $f_n\in \mathrm{AC}([0,1])$, 且 $f_n(0)=0(n=1,2,\cdots)$. 若 $\{f_n'\}$ 是 $L^1([0,1])$ 中 Cauchy 列, 试证明存在 $f\in\mathrm{AC}([0,1])$, 使得 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

证明. 由题设知 $f_n(x)=\int_0^x f_n'(t)\mathrm{d}t$. 又由于 $\{f_n'(x)\}$ 是 $L^1([0,1])$ 中的 Cauchy 列, 故存在 $g\in L^1([0,1])$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|f_n'(x)-g(x)|\mathrm{d}x=0.$$

因为我们有

$$\left|\int_0^x f_n'(x)\mathrm{d}x-\int_0^x g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^x|f_n'(x)-g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1|f_n'(x)-g(x)|\mathrm{d}x,$$

由此易知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t(0\leqslant x\leqslant 1).$$

令 $f(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$, 则 $f\in\mathrm{AC}([0,1])$, 且对 $\forall x\in[0,1]$, 有

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\int_0^x f_n'(t)\mathrm{d}t-\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1|f_n'(t)-g(t)|\mathrm{d}t.$$

从而 $f_n\rightrightarrows f$. □

13. 设 $f_k\in L^p([a,b])(1\leqslant p\leqslant+\infty)$, 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_p<+\infty$, 试证明存在 $f\in L^p([a,b])$, 使得

(i)$\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)=f(x)$, a.e. $x\in[a,b]$;

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ 依 $L^p([a,b])$ 意义收敛于 $f(x)$.

证明. 记 $E=[a,b]$. 令 $g_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}|f_k(x)|(n\in\mathbb{N})$, 由 Minkowski 不等式, 我们有

$$\|g_n\|_p\leqslant\sum_{k=1}^{n}\|f_k\|_p\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_p=:M<+\infty,$$

从而可知 $\|g_n\|_p^p\leqslant M^p, g_1(x)\leqslant\cdots\leqslant g_n(x)\leqslant\cdots$. 因此极限 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n^p(x)$ 几乎处处存在, 即 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|\right)^p<+\infty$, a.e. $x\in E$.

(i) 因为 $1\leqslant p\leqslant+\infty$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|<+\infty$, a.e. $x\in E$, 此即 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ 绝对收敛 a.e. $x\in E$. 故 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)=:f(x)$, a.e. $x\in E$.

(ii) 我们有

$$\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x = \int_E \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right|^p \mathrm{d}x \leqslant \int_E \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|\right)^p \mathrm{d}x \leqslant M^p \implies \|f\|_p \leqslant M$$
$$\implies \lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} f_k \right\|_p \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_p = 0.$$

这说明 (ii) 成立. □

15. 设 $\{\varphi_k\} \subset L^2(E)$ 是完全标准正交系, 试证明对 $f, g \in L^2(E)$, 有 $\langle f, g\rangle = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle f, \varphi_k\rangle\langle g, \varphi_k\rangle$.

证明. 注意广义 Fourier 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle f, \varphi_k\rangle\varphi_k(x)$ 在 E 上依 L^2 意义收敛于 $f(x)$, 从而可得

$$\langle f, g\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty}\langle f, \varphi_k\rangle\varphi_k, g \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f, \varphi_k\rangle\langle\varphi_k, g\rangle.$$

□

17. 设 $\{\varphi_k\} \subset L^2(E)$ 是标准正交系, 且有 $\Phi \in L^2(E)$, 使得 $|\varphi_k(x)| \leqslant |\Phi(x)|$, a.e. $x \in E$. 若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ 是几乎处处收敛的, 试证明 $a_k \to 0 (k \to \infty)$.

证明. 反证法, 假定结论不真, 则由题设知 $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$, a.e. $x \in E$. 从而根据控制收敛定理可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_2 = 0$. 但这与 $\|\varphi_n\|_2 = 1$ 矛盾. □